Материалы для проведения заключительного этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Первый день

Нижний Новгород, 19–25 апреля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, Н. Ю. Власова, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

А также: М. А. Дидин, И. А. Ефремов, К. А. Кноп, П. Ю. Козлов, Т. С. Коротченко, А. Д. Терёшин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, А. И. Храбров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

11 класс

11.1. В пространстве расположен бесконечный цилиндр (т.е. геометрическое место точек, удалённых от данной прямой ℓ на данное расстояние $R > 0$). Могут ли шесть прямых, содержащих рёбра некоторого тетраэдра, иметь ровно по одной общей точке с этим цилиндром? (*А. Кузнецов*)

Ответ. Не могут.

Решение. Предположим, что такая конструкция существует. Спроецируем тетраэдр на плоскость α, перпендикулярную прямой ℓ. Проекцией цилиндра будет некоторая окружность ω. Обозначим проекции вершин тетраэдра через A, B, C, D, они все будут различны (в противном случае одна из прямых, содержащих стороны тетраэдра, будет параллельна ℓ, такая прямая не может иметь с цилиндром ровно одну общую точку). Каждая из прямых, соединяющих точки A, B, C, D должна иметь с окружностью ω одну общую точку, то есть касаться этой окружности. При этом точки A, B, C, D не могут лежать на одной прямой (поскольку вершины тетраэдра не лежат в одной плоскости). Значит, либо на одной прямой лежат какие-то три из них, не умаляя общности B, C, D, либо никакие три из этих точек на одной прямой не лежат. В любом случае прямые AB, AC, AD попарно различны, однако они все касаются окружности ω и проходят через точку A, противоречие.

11.2. Тройку положительных чисел (a, b, c) назовём *загадочной*, если

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2c^2} + 2ab} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2a^2} + 2bc} + \\ + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2b^2} + 2ca} = 2(a + b + c).$$

Докажите, что если тройка (a, b, c) — загадочная, то тройка (c, b, a) — тоже загадочная. (*А. Кузнецов, К. Сухов*)

Решение. Покажем, что тройка (a, b, c) — загадочная в том и только в том случае, когда $abc = 1$, из этого немедленно последует требуемое в задаче. Предположим, что $abc < 1$. Тогда $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2c^2} + 2ab} > \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = a + b$, аналогично

$\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2a^2}+2bc} > b+c$ и $\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2b^2}+2ca} > c+a$. Итого, в этом случае левая часть равенства из условия больше правой. Рассуждая аналогично, в случае $abc > 1$ имеем, что правая часть больше левой, а в случае $abc = 1$ достигается равенство, что и требовалось.

11.3. Юрий подошёл к великой таблице майя. В таблице 200 столбцов и 2^{200} строк. Юрий знает, что в каждой клетке таблицы изображено солнце или луна, и любые две строки отличаются (хотя бы в одном столбце). Каждая клетка таблицы закрыта листом. Поднялся ветер и сдул некоторые листы: по два листа с каждой строки. Могло ли так случиться, что теперь Юрий хотя бы про 10 000 строк может узнать, что в них изображено в каждом из столбцов? (*И. Богданов, К. Кноп*)

Ответ. Могло.

Решение. Разобьём все позиции на две половины по 100 столбцов — «левую» и «правую». Предположим, что в каждой строке, в которой есть два солнца в одной половине (назовём их *солнечными*), ветер сдул листья с одной из таких пар солнц, а в каждой несолнечной строке — таких строк ровно 101^2 — ветер обнаружил положения всех солнц (в несолнечной строке не более двух солнц, так что ветер мог так поступить). Тогда Юрий* сообразит, что те строки, где открыты два солнца в одной половине — точно солнечные, а значит, несолнечные строки — это в точности те 101^2 строк, в которых ветер не открывал два солнца в одной половине. У каждой из них открыты все солнца, так что закрытые листьями изображения в этих строках — луна.

11.4. Четырёхугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность ω. Через вершину A проведена прямая $\ell_a \parallel BC$, через вершину B — прямая $\ell_b \parallel CD$, через вершину C — прямая $\ell_c \parallel DA$, через вершину D — прямая $\ell_d \parallel AB$. Четырёхугольник, последовательные стороны которого лежат на этих четырёх прямых (именно в этом порядке), вписан в окружность γ. Окружности ω и γ пересекаются в точках E и F. Дока-

*Юрий Валентинович Кнорозов (1922–1999) — советский и российский учёный, дешифровавший письменность майя.

жите, что прямые AC, BD и EF пересекаются в одной точке.

(*А. Кузнецов*)

Первое решение. Без ограничения общности можно считать, что лучи AB и DC; CB и DA пересекаются. Пусть отрезки AC и BD пересекаются в точке G, а также $A'B'C'D'$ — четырёхугольник, образованный прямыми ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, ℓ_d (см. рис. 4). Также обозначим через X пересечение AB и CD', через Y — пересечение CD и AB'.

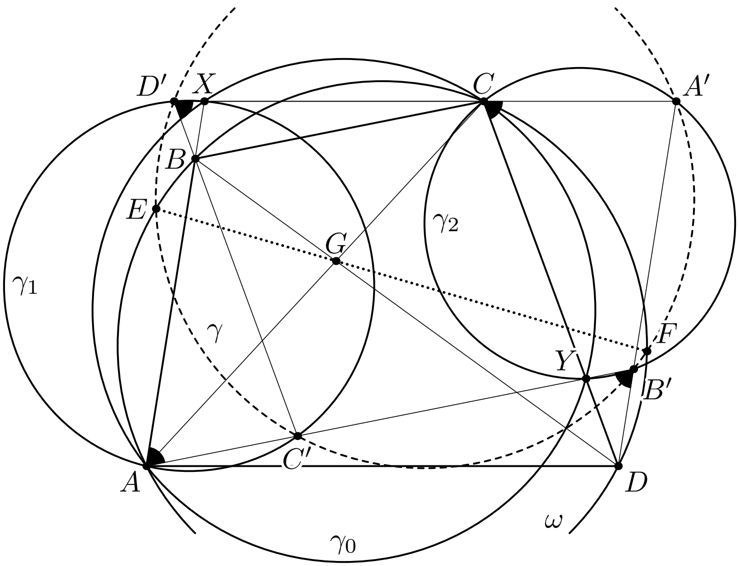

Рис. 4

Пусть $\angle B'AB = \alpha$. Из вписанности четырёхугольника $A'B'C'D'$ и условий $AX \parallel \ell_d$, $CY \parallel \ell_b$ имеем: $\alpha = \angle B'AX = 180^\circ - \angle A'B'C' = \angle C'D'X = \angle YCA'$. Значит, во-первых, точки A, D', X, C' лежат на одной окружности, обозначим её γ_1; во-вторых, точки C, Y, A', B' лежат на одной окружности, обозначим её γ_2; в-третьих, точки A, X, C, Y лежат на одной окружности, обозначим её γ_0. Заметим, что точка B — радикальный центр окружностей γ, γ_0, γ_1 (поскольку она лежит на прямых AX и $C'D'$); точка D — радикальный центр окружностей γ, γ_0, γ_2 (так как она лежит на прямых CY и $A'B'$). Таким образом, BD — радикальная ось окружностей γ_0 и γ; AC — радикальная ось окружностей γ_0 и ω; EF — радикальная ось окружностей ω и γ, поэтому эти три прямые пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

Второе решение. Введём обозначения как в первом решении. Для точки плоскости P обозначим через $f(P)$ разность степеней точки P относительно окружностей ω и γ. Поскольку EF — радикальная ось окружностей ω и γ, то достаточно доказать, что $f(G) = 0$. Кроме того, легко видеть, что $f(A) = AC' \cdot AB'$ и $f(C) = -CD' \cdot CA'$ (см. рис. 5).

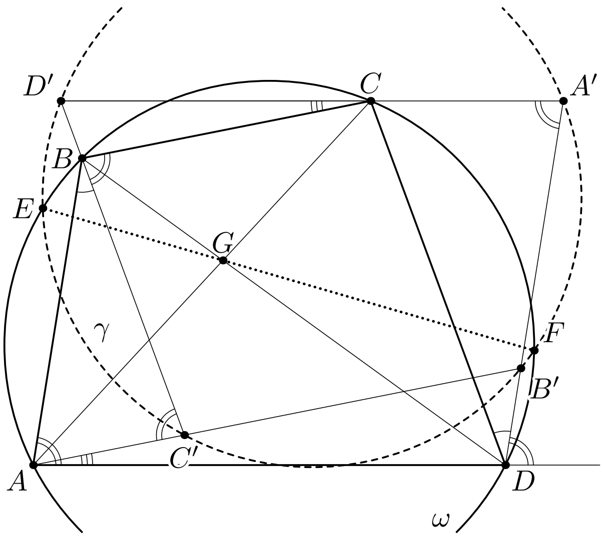

Рис. 5

Заметим, что функция f — линейная, то есть для точки P на отрезке QR выполнено равенство $f(P) = \dfrac{PR \cdot f(Q) + PQ \cdot f(R)}{QR}$ $(\star)$. Мы докажем это утверждение позднее. Пока, применив его для точек A, G, C, мы получим, что $f(G) = \dfrac{AG \cdot f(C) + CG \cdot f(A)}{AC}$.

Таким образом, достаточно доказать, что $\dfrac{f(A)}{-f(C)} = \dfrac{AG}{CG}$ $(\star\star)$. Заметим, что $\dfrac{AG}{GC} = \dfrac{d(A, BD)}{d(C, BD)} = \dfrac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \dfrac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}$ (последнее равенство следует из того, что $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$; через $d(P, \ell)$ мы обозначаем расстояние от точки D до прямой ℓ). Следовательно, равенство ($\star\star$) переписывается в виде: $\dfrac{AC'\cdot AB'}{CD'\cdot CA'}=\dfrac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}$.

Из вписанности четырёхугольника $ABCD$ и данных в условии параллельностей прямых следуют равенства углов: $\angle CA'D=180^\circ-\angle ADB'=\angle BAD=180^\circ-\angle BCD=\angle CBC'=$ $=\angle AC'B$; $\angle ABC'=\angle CDA'$ и $\angle BCD'=\angle B'AD$. Таким образом, $\triangle ABC'$ и $\triangle CDA'$, а также $\triangle DAB'$ и $\triangle BCD'$ подобны по двум углам. Из подобия получаем равенства отношений $\dfrac{AC'}{CA'}=\dfrac{AB}{CD}$ и $\dfrac{AB'}{CD'}=\dfrac{AD}{BC}$, остаётся лишь перемножить эти равенства.

Вернёмся к доказательству линейности функции f. Введём декартовы координаты таким образом, чтобы центры окружностей ω и γ лежали на оси абсцисс, пусть их координаты будут $(x_1,0)$ и $(x_2,0)$, а радиусы окружностей — R_1 и R_2. Тогда для произвольной точки P с координатами (x,y) по определению степени точки мы получаем, что $f(P)=(x-x_1)^2+y^2-R_1^2-$ $-(x-x_2)^2-y^2+R_2^2=ax+b$, где a и b — две константы. Если точка P лежит на отрезке QR и x_q, x_r — координаты точек Q и R по оси абсцисс, то $x=\dfrac{PR\cdot x_q+PQ\cdot x_r}{QR}$, откуда немедленно следует ($\star$).

Замечание 1. Линейная функция в произвольным образом введённых декартовых координатах имеет вид $f(x,y)=ax+$ $+by+c$. Если она отлична от константы, то решением уравнения $f(x,y)=0$ будет прямая. Например, таким образом (рассуждая как в приведённом решении) доказывается, что радикальная ось двух окружностей — это прямая, перпендикулярная линии центров.

Замечание 2. Приведём план решения задачи с помощью комплексных чисел. Пусть окружность ω — стандартная единичная, координаты точек A, B, C, D обозначаются соответственно a, b, c, d. Рассмотрим прямые (точнее, уравнения прямых) $\ell_{ac}(z)=ac\bar{z}+z-a-c$, $\ell_{bd}(z)=bd\bar{z}+z-b-d$ — это соответствующие диагонали AC, BD. Прямая ℓ_a через точку A параллельно BC имеет уравнение $\ell_a(z)=bc\bar{z}+z-bc/a-a$, аналогично три другие прямые из условия. Окружность γ, проходящая через точки их пересечения, имеет уравнение $F(z) := = \ell_a(z)\ell_c(z) - \ell_b(z)\ell_d(z)$: с одной стороны, точки пересечения удовлетворяют условию $F = 0$, с другой стороны, коэффициенты при z^2 и $\bar{z}^2$ сокращаются, так что это именно окружность. Радикальная ось окружностей γ и ω имеет уравнение $\ell_{ef}(z) := = F(z) - T(z\bar{z} - 1)$, где T — подходящий коэффициент, чтобы получилась прямая (он нам не будет важен в дальнейшем). Докажем, что для некоторых коэффициентов τ, θ имеет место тождество $\ell_{ef}(z) + \tau\ell_{ac}(z) + \theta\ell_{bd}(z) = 0$ (A), из этого будет следовать требуемое. Тождество (A) достаточно проверять, когда z — одна из вершин четырёхугольника $ABCD$, потому что на одной прямой они не лежат. Подставляя, например, $z = a$, получаем тождество $0 = F(a) + \theta\ell_{bd}(a) = -\ell_b(a)\ell_d(a) + \theta\ell_{bd}(a)$. Это даёт значение θ, и оно должно быть согласовано со значением, которое получается для $z = c$, то есть должно выполняться тождество $\ell_b(a)\ell_d(a)/\ell_{bd}(a) = \ell_b(c)\ell_d(c)/\ell_{bd}(c)$, и второе аналогичное. Все эти значения считаются непосредственно (и раскладываются на множители, например, $\ell_{bd}(a) = bd/a + a - b - d = (a - b)(a - d)/d$), после чего не составляет труда доказать нужное тождество.

Критерии проверки работ 11 класса.		
индекс критерия	критерий	балл
Задача 1		
	В целом верные решения с недочетами оцениваются не менее чем в 5 баллов. Ниже перечислены основные недочеты, за которые снимается по 1 баллу	
M	Упущен случай, когда вершина тетраэдра лежит на цилиндре	
M1	Упущен случай, в котором проекции двух вершин совпадают	
M2	Не объяснено, почему проекции вершин тетраэдра не лежат на одной прямой	
	Если нарушена логика рассмотрения случаев, задача считается не решенной. Продвижения (при отсутствии решения) оцениваются по схемам A или B, не суммируются продвижения из разных схем. Суммируются продвижения в рамках одной схемы под разными пунктами (I, II, III) Работа оценивается не более чем в 4 балла.	
A	Решение с проецированием вдоль оси цилиндра	
AI	Доказано, что при проекции вершин тетраэдра на плоскость, пер оси цилиндра, получаются 4 разные* точки и прямые, их соединяющие, касаются окружности (проекции цилиндра)	2 балла
	*Если не объяснено, почему не могут совпадать проекции начисляется лишь 1 балл	
AII	Доказано, что 4 проекции вершин не лежат на одной прямой	1 балл
AIIIa	Разобран случай, когда проекция некоторой грани — треугольник	1 балл
AIIIb	Доказано, что проекции трех вершин лежат на одной прямой	1 балл
AIIIc	Изучается выпуклая оболочка проекций вершин тетраэдра и объяснено, что она не может быть четырехугольником	1 балл
	IIIa, IIIb, IIIc не суммируются друг с другом	
B	Решение без перехода к проекциям	
BI	Описание прямых, проходящих через точку вне цилиндра и имеющих с ним 1 общую точку: они лежат в двух плоскостях, касающихся цилиндра	1 балл
BII	Сформулировано и доказано, что через каждую вершину тетраэдра проходит грань, параллельная прямой ℓ	2 балла
BIII	Доказано, что ребро тетраэдра не может быть параллельно ℓ	1 балл
Задача 2		
(Z)	Алгебраические преобразования без дальнейших продвижений	0 баллов
(A)	Перепутаны знаки в случаях неравенства abc<>1	не более 6 баллов
(B)	Доказано, что если abc=1, то тройка загадочная	1 балл
Задача 3		
	доказано, что встречаются все двоичные коды ровно по одному разу	0 баллов
	показано, как восстановить меньшее количество строк (обычно 400)	0 баллов
	продвижения в оценке сверху количества восстанвливаемых строк	0 баллов
	исследован аналогичный вопрос в ситуации, когда ветер сдувает один лист из каждой строки	0 баллов
	предъявлен верный способ действий ветра и Юрия, но не доказано, что восстановление однозначно	4 балла

Задача 4		
	Критерии по 11.4:	
(Z1)	Доказана вписанность вспомогательного четырёхугольника, полученного при помощи "антипараллельности" из исходного. Например для четырёхугольника A, D0, X, C или для A, X, C, Y из первого решения.	0 баллов
(Z2)	Сделана "инверсия + симметрия" или аналогичное преобразование, после чего задача переформулирована в новых терминах.	0 баллов
(Z3)	Сформулировано, что разность степеней точек относительно двух фиксированных окружностей линейная функция.	0 баллов
Задача 5		
	Только оценка	2 балла
	Только пример	3 балла
	Оценка и алгоритм без обоснования	5 баллов
Задача 6		
Z	Перечисленные в этом пункте продвижения не оцениваются	
	Изогональность лучей AO и AH в угле BAC, иной подсчет углов без дальнейших выводов	
	Отмечена точка D (второе пересечение окружности (ABC) и AH)	
	Доказано, что отрезок XY — серединный перпендикуляр к AD, равенства $AX = XD$ и $AY = YD$	
	Вписанность $XYZT$, $BZTC$, параллельность XY и AB	
	Переформулировка задачи после инверсии (например, с центром A).	
A	Отмечена точка D, сформулирована гипотеза о касании окружностей в точке D и доказана вписанность $XYZT$.	1 балл
B	Доказано, что окружности (DXY) и (ABC) касаются	1 балл
C	Доказано, что окружности (DZT) и (ABC) касаются	1 балл
D1	Доказано, что $BZHD$ — вписанный	1 балл
D2	Доказано, что $AZ = ZY$	2 балла
S	При наличии лишь продвижений, указанных выше, работа оценивается не более чем в 3 балла. С учетом этого, суммируются продвижения из разных групп (A, B, C, D). Продвижения из одной группы не суммируются. Наличие продвижений B или C автоматически засчитывается за наличие гипотезы из продвижения A.	
E	Доказано, что точки D, X, Y, Z, T лежат на одной окружности	4 балла
Задача 7		
	доказано, что компоненты связности -- деревья (или: задача сведена к вычислению математического ожидания числа дорог)	0 баллов
	доказано, что количество компонент равно количеству взаимных дорог	1 балл
	искомая величина выражена через сумму по диагонали треугольника Паскаля	4 балла
	мелкие ошибки вычислительного или комбинаторного характера	снятие от 1 до 2 баллов
Задача 8		
(A)	Доказана оценка $c\sqrt[100]{p}$	1 балл