Материалы для проведения заключительного этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Второй день

Нижний Новгород, 19–25 апреля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, Н. Ю. Власова, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

А также: М. А. Дидин, И. А. Ефремов, К. А. Кноп, П. Ю. Козлов, Т. С. Коротченко, А. Д. Терёшин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, А. И. Храбров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

11 класс

11.5. Квартал представляет собой клетчатый квадрат 10×10. В новогоднюю ночь внезапно впервые пошёл снег, и с тех пор каждую ночь на каждую клетку выпадало ровно по 10 см снега; снег падал только по ночам. Каждое утро дворник выбирает один ряд (строку или столбец) и сгребает весь снег оттуда на один из соседних рядов (с каждой клетки — на соседнюю по стороне). Например, он может выбрать седьмой столбец и из каждой его клетки сгрести весь снег в клетку слева от неё. Сгребать снег за пределы квартала нельзя. Вечером сотого дня года в город приедет инспектор и найдёт клетку, на которой лежит сугроб наибольшей высоты. Цель дворника — добиться, чтобы эта высота была минимальна. Сугроб какой высоты найдёт инспектор?

(*А. Солынин*)

Ответ. 1120 см.

Решение. Будем измерять высоту сугроба в дециметрах. Также будем считать, что сторона одной клетки равна 1 дм, то есть за каждую ночь на клетку выпадает 1 дм^3 снега.

Докажем, что после сотого утра найдется сугроб высотой не менее 112 дм. Предположим, что такого сугроба нет. Так как дворник в сотое утро полностью сгрёб снег с какого-то ряда, в десяти клетках квадрата снега нет. В каждой из оставшихся 90 клеток, по нашему предположению, не более 111 дм^3 снега, то есть всего снега не больше, чем 9990 дм^3. Однако за 100 ночей суммарно выпало 10 000 дм^3 снега. Противоречие.

Покажем, как может действовать дворник, чтобы после сотого утра каждый сугроб имел высоту не более 112 дм (то есть в каждой клетке было не более 112 дм^3 снега).

Способ 1. Первые 11 дней дворник сгребает снег из второго столбца в первый, следующие 11 дней дворник сгребает снег из третьего столбца во второй, затем 11 дней из четвёртого в третий, и т. д. Через 99 дней в десятом столбце не будет снега. Посчитаем, сколько снега стало в столбце $i \leqslant 9$ через 99 дней. Вечером $11(i-1)$-го дня в столбце номер i не было снега, а в столбце $i+1$ в каждой клетке было по $11(i-1)$ дм^3 снега. На следующий вечер в столбце i станет по $11(i-1)+2$ дм^3 снега в каждой клетке. Затем ещё десять дней количество снега в каждой клетке i-го столбца будет увеличиваться на 2, а затем $11(9-i)$ дней — на 1. Итого, через 99 дней в каждой клетке столбца i будет по $11(i-1)+22+11(9-i)=110$ дм^3 снега. В сотую ночь выпадет ещё по 1 дм^3 в каждую клетку. А сотым утром дворник сгребет снег из десятого столбца в девятый. Таким образом, в каждой клетке будет не более 112 дм^3 снега.

Способ 2. Пусть дворник сгребёт снег из 2-го столбца в 1-ый, из 3-го во 2-й, …, из 10-го в 9-ый. Тогда вечером девятого дня в первых девяти столбцах будет по 10 дм^3 снега в каждой клетке, а в десятом столбце снега не будем. Затем дворник проделывает аналогичный процесс в обратном порядке: из 9-го в 10-ый, из 8-го в 9-ый, …, из 2-го в первой. Тогда вечером 18-го дня в клетках последних девяти столбцов будет по 20 дм^3 снега, а в первом столбце не будет снега. Аналогично повторим такие сдвиги (каждый длится 9 дней) ещё 9 раз, и через 99 дней получим в клетках девяти столбцов по 110 дм^3 снега и один крайний столбец пустой. Сотым утром сгребаем снег из этого крайнего в соседний и получаем не более 112 дм^3 снега в каждой клетке.

11.6. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром в точке O, его высоты пересекаются в точке H. Через точку O проведена прямая, перпендикулярная AH, а через точку H — прямая, перпендикулярная AO. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами AB и AC лежат на одной окружности, которая касается окружности ω. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая AH повторно пересекает окружность ω в точке D (см. рис. 5). Тогда прямая, проведённая по условию через O — серединный перпендикуляр к хорде AD, пусть она пересекает стороны AB и AC в точках X и Y, а прямая через H из условия задачи пересекает их в точках Z и T. Поскольку $XY \parallel AC$, то окружность (AXY) касается окружности ω в точке A. При симметрии относительно XY окружность ω переходит в себя, а окружность (AXY) переходит в окружность (DXY), тогда она тоже касается окружности ω.

Поскольку $ZH \perp AO$, то $\angle AZH = 90^\circ - \angle OAB = \angle ACB =$

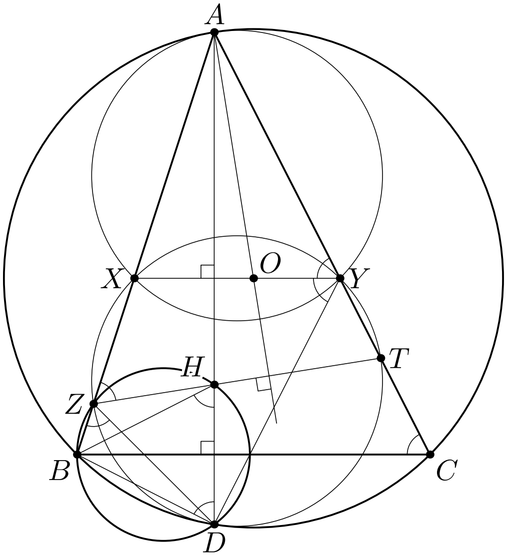

Рис. 5

$= \angle ADB$. Следовательно, четырёхугольник $BZHD$ — вписанный. Тогда $\angle BZD = \angle BHD = 90^\circ - \angle HCB = \angle ACB$. Значит, в силу сказанного выше, $\angle XYD = \angle AYX = \angle ACB = \angle BZD$, поэтому точка Z лежит на окружности (DXY). Аналогично, на этой окружности лежит и точка T, откуда и следует требуемое.

Замечание. Можно рассуждать несколько иначе: установить (похожими равенствами углов), что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности, а также что окружности (DXY) и (DZT) касаются окружности ω в точке D. Однако эти три окружности не могут быть различными, поскольку в таком случае их радикальные оси не пересекаются в одной точке, в чём нетрудно убедиться. Значит, все эти окружности совпадают, что нам и требовалось.

11.7. В стране $n > 100$ городов и пока нет дорог. Правительство наугад определяет стоимость строительства дороги (с двусторонним движением) между каждыми двумя городами, используя по разу все суммы от 1 до $n(n-1)/2$ талеров (все варианты равновероятны). Мэр каждого города выбирает самую дешёвую из $n-1$ возможных дорог, идущих из этого города, и она строится (это может быть взаимным желанием мэров обоих соединяемых городов или только одного из двух).

После строительства этих дорог города оказываются разбиты на M компонент связности (между городами одной компоненты связности можно добраться по построенным дорогам, возможно, с пересадками, а между городами разных компонент — нельзя). Найдите математическое ожидание случайной величины M. (*Ф. Петров*)

Ответ. $\dfrac{n(n-1)}{2(2n-3)}$.

Решение. Дорогу, которую хотят строить сразу два мэра, назовём *надёжной*. Рассмотрим в каждой компоненте самую дешёвую дорогу AB. Тогда она является надёжной. Предположим, что в этой компоненте есть ещё одна надёжная дорога CD (ясно, что города C, D отличны от A, B) и рассмотрим путь по дорогам от одного из городов A, B до одного из городов C, D — не умаляя общности, он имеет вид $AX_1X_2\ldots X_kC$ (города X_1, $\ldots$, X_k отличны от A, B, C, D, возможно, $k=0$). Тогда дорогу AX_1 хочет строить мэр города X_1 (мэр города A хочет строить AB), дорогу X_1X_2 — мэр города X_2 (мэр города X_1 хочет строить X_1A) и так далее, мэр города C хочет строить дорогу CX_k, а не CD — противоречие.

Итак, в каждой компоненте есть ровно одна надёжная дорога. Для каждой из $n(n-1)/2$ пар городов A, B рассмотрим случайную величину ξ_{AB}, которая равна 1, если AB — надёжная дорога, и 0 в противном случае. Из доказанного следует, что M есть сумма ξ_{AB} по всем $n(n-1)/2$ парам $\{A, B\}$. Для данных A, B событие $\xi_{AB}=1$ означает, что дорога AB — самая дешёвая из $2n-3$ дорог, выходящих из A или B, так что вероятность такого события равна $1/(2n-3)$ (из симметричности распределения цен эти дороги равноправны, так что каждая из них является самой дешёвой с вероятностью $1/(2n-3)$). Значит, математическое ожидание ξ_{AB} равно $1/(2n-3)$, а математическое ожидание случайной величины M равно сумме этих математических ожиданий по всем парам, то есть $\dfrac{n(n-1)}{2(2n-3)}$.

11.8. Докажите, что существует такое $c>0$, что для любого нечётного простого $p=2k+1$ числа 1^0, 2^1, 3^2, $\ldots$, k^{k-1} дают хотя бы $c\sqrt{p}$ различных остатков при делении на p.

(*М. Туревский, И. Богданов*)

Решение. Все сравнения в этом решении производятся по модулю p. Если a и b — целые числа, причём b не делится на p, то через a/b мы обозначаем тот единственный остаток c по модулю p, для которого $a \equiv bc$.

Пусть числа 1^0, 2^1, 3^2, …, k^{k-1} дают ровно d различных остатков при делении на p. Обозначим $t = [p/4]$. Тогда выражения вида $f(a) = (2a)^{2a-1}/(a^{a-1})^2 = 2^{2a-1}a$ при $1 \leqslant a \leqslant t$ дают максимум d^2 различных остатков.

Назовём пару натуральных чисел (a, b) таких, что $1 \leqslant a < < b \leqslant t$, *исключительной*, если $f(a) \equiv f(b)$. Покажем, что для каждого $\delta = 1, 2, \ldots, t-1$ существует не более одной исключительной пары (a, b), в которой $b - a = \delta$. Действительно, если (a, b) — такая пара, то из $2^{2a-1}a = 2^{2b-1}b$ вытекает, что $a/b \equiv 2^{2\delta}$, откуда $b = a + \delta \equiv 2^{2\delta}b + \delta$, или $b(1 - 2^{2\delta}) \equiv \delta$. Такой остаток b не более чем единственен (поскольку $\delta \neq 0$), а по нему восстанавливается a.

Итого, существует не более чем $t - 1$ исключительная пара; обозначим их количество через S. Пусть числа $f(1)$, $f(2)$, …, $f(t)$ дают ровно ℓ различных остатков по модулю p, встречающихся a_1, a_2, …, a_ℓ раз соответственно. Тогда $\sum_{i=1}^{\ell} a_i = t$ и $S = \sum_{i=1}^{\ell} C_{a_i}^2$. Верна следующая цепочка неравенств:

$$t - 1 \geqslant S = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\ell} a_i^2 - \sum_{i=1}^{\ell} a_i\right) \geqslant \frac{t^2/\ell - t}{2},$$

откуда $\ell \geqslant t^2/(3t-2) > t/3$. Вспоминая, что $\ell \leqslant d^2$, получаем оценку $d > \sqrt{t/3} \geqslant [\sqrt{p/12}]$.

Таким образом, в качестве искомой константы c можно взять, например, число $1/24$: для простых $p < 12$ неравенство $d > \frac{\sqrt{p}}{24}$ тривиально, а для $p > 12$ следует из неравенства $[x] \geqslant x/2$ при $x > 1$.

Критерии проверки работ 11 класса.		
индекс критерия	критерий	балл
Задача 1		
	В целом верные решения с недочетами оцениваются не менее чем в 5 баллов. Ниже перечислены основные недочеты, за которые снимается по 1 баллу	
M	Упущен случай, когда вершина тетраэдра лежит на цилиндре	
M1	Упущен случай, в котором проекции двух вершин совпадают	
M2	Не объяснено, почему проекции вершин тетраэдра не лежат на одной прямой	
	Если нарушена логика рассмотрения случаев, задача считается не решенной. Продвижения (при отсутствии решения) оцениваются по схемам A или B, не суммируются продвижения из разных схем. Суммируются продвижения в рамках одной схемы под разными пунктами (I, II, III) Работа оценивается не более чем в 4 балла.	
A	Решение с проецированием вдоль оси цилиндра	
AI	Доказано, что при проекции вершин тетраэдра на плоскость, перп оси цилиндра, получаются 4 разные* точки и прямые, их соединяющие, касаются окружности (проекции цилиндра)	2 балла
	*Если не объяснено, почему не могут совпадать проекции начисляется лишь 1 балл	
AII	Доказано, что 4 проекции вершин не лежат на одной прямой	1 балл
AIIIa	Разобран случай, когда проекция некоторой грани — треугольник	1 балл
AIIIb	Доказано, что проекции трех вершин лежат на одной прямой	1 балл
AIIIc	Изучается выпуклая оболочка проекций вершин тетраэдра и объяснено, что она не может быть четырехугольником	1 балл
	IIIa, IIIb, IIIc не суммируются друг с другом	
B	Решение без перехода к проекциям	
BI	Описание прямых, проходящих через точку вне цилиндра и имеющих с ним 1 общую точку: они лежат в двух плоскостях, касающихся цилиндра	1 балл
BII	Сформулировано и доказано, что через каждую вершину тетраэдра проходит грань, параллельная прямой ℓ	2 балла
BIII	Доказано, что ребро тетраэдра не может быть параллельно ℓ	1 балл
Задача 2		
(Z)	Алгебраические преобразования без дальнейших продвижений	0 баллов
(A)	Перепутаны знаки в случаях неравенства abc<>1	не более 6 баллов
(B)	Доказано, что если abc=1, то тройка загадочная	1 балл
Задача 3		
	доказано, что встречаются все двоичные коды ровно по одному разу	0 баллов
	показано, как восстановить меньшее количество строк (обычно 400)	0 баллов
	продвижения в оценке сверху количества восстанвливаемых строк	0 баллов
	исследован аналогичный вопрос в ситуации, когда ветер сдувает один лист из каждой строки	0 баллов
	предъявлен верный способ действий ветра и Юрия, но не доказано, что восстановление однозначно	4 балла

Задача 4		
	Критерии по 11.4:	
(Z1)	Доказана вписанность вспомогательного четырёхугольника, полученного при помощи "антипараллельности" из исходного. Например для четырёхугольника A, D0, X, C или для A, X, C, Y из первого решения.	0 баллов
(Z2)	Сделана "инверсия + симметрия" или аналогичное преобразование, после чего задача переформулирована в новых терминах.	0 баллов
(Z3)	Сформулировано, что разность степеней точек относительно двух фиксированных окружностей линейная функция.	0 баллов
Задача 5		
	Только оценка	2 балла
	Только пример	3 балла
	Оценка и алгоритм без обоснования	5 баллов
Задача 6		
Z	Перечисленные в этом пункте продвижения не оцениваются	
	Изогональность лучей AO и AH в угле BAC, иной подсчет углов без дальнейших выводов	
	Отмечена точка D (второе пересечение окружности (ABC) и AH$)	
	Доказано, что отрезок XY — серединный перпендикуляр к AD, равенства $AX = XD$ и $AY = YD$	
	Вписанность $XYZT$, $BZTC$, параллельность XY и AB	
	Переформулировка задачи после инверсии (например, с центром A).	
A	Отмечена точка D, сформулирована гипотеза о касании окружностей в точке D и доказана вписанность $XYZT$.	1 балл
B	Доказано, что окружности (DXY) и (ABC) касаются	1 балл
C	Доказано, что окружности (DZT) и (ABC) касаются	1 балл
D1	Доказано, что $BZHD$ — вписанный	1 балл
D2	Доказано, что $AZ = ZY$	2 балла
S	При наличии лишь продвижений, указанных выше, работа оценивается не более чем в 3 балла. С учетом этого, суммируются продвижения из разных групп (A, B, C, D). Продвижения из одной группы не суммируются. Наличие продвижений B или C автоматически засчитывается за наличие гипотезы из продвижения A.	
E	Доказано, что точки D, X, Y, Z, T лежат на одной окружности	4 балла
Задача 7		
	доказано, что компоненты связности -- деревья (или: задача сведена к вычислению математического ожидания числа дорог)	0 баллов
	доказано, что количество компонент равно количеству взаимных дорог	1 балл
	искомая величина выражена через сумму по диагонали треугольника Паскаля	4 балла
	мелкие ошибки вычислительного или комбинаторного характера	снятие от 1 до 2 баллов
Задача 8		
(A)	Доказана оценка $c\sqrt[100]{p}$	1 балл