Материалы для проведения заключительного этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Первый день

Нижний Новгород,
19–25 апреля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, Н. Ю. Власова, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

А также: М. А. Дидин, И. А. Ефремов, К. А. Кноп, П. Ю. Козлов, Т. С. Коротченко, А. Д. Терёшин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, А. И. Храбров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Петя и Вася знают лишь натуральные числа, не превосходящие $10^9 - 4000$. Петя считает хорошими числа, представимые в виде $abc + ab + ac + bc$, где a, b и c — натуральные числа, **не меньшие** 100. Вася считает хорошими числа, представимые в виде $xyz - x - y - z$, где x, y и z — натуральные числа, **бóльшие** 100. Для кого из них хороших чисел больше? (*И. Богданов*)

Ответ. Для Васи.

Решение. Если число $k = abc + ab + ac + bc \leqslant 10^9 - 4000$ хорошее для Пети, то (также натуральное) число

$$k - 2 = (a+1)(b+1)(c+1) - (a+1) - (b+1) - (c+1)$$

является хорошим для Васи. Значит, если для Пети есть p хороших чисел, то мы предъявили p различных чисел, хороших для Васи, и все они строго меньше, чем $10^9 - 4000$. Но число

$$10^9 - 4000 = (1000-1)\cdot 1000\cdot(1000+1) - (1000-1) - 1000 - (1000+1)$$

также является хорошим для Васи; поэтому для Васи есть хотя бы $p+1$ хорошее число.

9.2. У натурального числа ровно 50 делителей. Может ли оказаться, что никакая разность двух различных его делителей не делится на 100? (*Методкомиссия по мотивам задачи А. Чиронова*)

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, что такое число n существует. Условие равносильно тому, что все числа, образованные последними двумя цифрами делителей, различны (мы считаем, что к однозначным числам спереди приписаны нули). Назовём такую пару последних цифр *хвостом* числа. Заметим, что хвост числа имеет те же остатки от деления на 4 и на 5, что и исходное число.

Предположим, что n делится на 5. Тогда для любого его делителя d, не кратного 5, существует и делитель $5d$, кратный 5. При этом для разных делителей d мы получаем разные делители $5d$; поэтому количество кратных 5 делителей не меньше половины, то есть не меньше 25. Но такие делители имеют хвосты, оканчивающиеся либо на 0, либо на 5. Таких возможных хвостов не больше 20, поэтому два из них совпадают. Это противоречие показывает, что n не делится на 5, и хвосты его делителей не могут оканчиваться на 0 или 5.

Если число n нечётно, то все его делители также нечётны. Однако существует всего 50 возможных нечётных хвостов, и 10 из них оканчиваются на 5, то есть не могут появиться. Поэтому и в этом случае найдутся два одинаковых хвоста.

Если число n делится на 2, но не на 4, то все его делители разбиваются на пары $(d, 2d)$, где d — нечётный делитель n. При этом все числа вида $2d$ имеют хвосты, не делящиеся на 4, а таких хвостов (не делящихся на 5) всего 20. Значит, два из этих хвостов одинаковы.

Наконец, пусть наибольшая степень двойки, на которую делится n, равна 2^r, где $r \geqslant 2$. Тогда, если d — нечётный делитель n, то числа d, $2d$, $2^2d, \ldots, 2^r d$ также будут делителями n, и этим исчерпываются все делители n. Поэтому общее число делителей n будет кратно $r+1$. Таким образом, 50 делится на $r+1$ и, значит, $r \geqslant 4$.

Тогда n имеет $\frac{50}{r+1} \leqslant 10$ нечётных делителей и столько же делителей, которые чётны и не делятся на четыре. Стало быть, оставшиеся делители (которых не меньше 30) кратны 4 и, значит, их хвосты также кратны четырём. Но таких хвостов возможно лишь 20, поэтому опять два из них совпадут.

9.3. Двум мальчикам выдали по мешку картошки, в каждом мешке по 150 клубней. Ребята по очереди перекладывают картошку, каждый своим очередным ходом перекладывает ненулевое количество клубней из своего мешка в чужой. При этом они должны соблюдать *условие новой возможности*: на каждом ходе мальчик должен переложить больше клубней, чем у него было в мешке перед любым из его предыдущих ходов (если такие ходы были). Так, первым своим ходом мальчик может переложить любое ненулевое количество, а своим пятым ходом мальчик может переложить 200 клубней, если перед его первым, вторым, третьим и четвёртым ходами количества клубней в его мешке были меньше 200. Какое максимальное суммарное количество ходов могут совершить ребята? (*Е. Молчанов*)

Ответ. 19.

Решение. Пусть в процессе было N ходов. Посмотрим на процесс «в обратную сторону». Назовём последний сделанный ход первым, предпоследний (сделанный другим мальчиком) — вторым, и т.д. Обозначим через a_0 количество клубней в мешке, из которого их перекладывали на первом ходе, после этого хода (то есть в самом конце процесса). Аналогично, обозначим через a_{i-1} количество клубней в мешке, из которого перекладывали на i-м ходе, непосредственно после этого хода. Наконец, обозначим через a_N количество клубней в мешке, *в который* перекладывали на N-м (самом раннем) ходе, перед этим ходом (тогда $a_N = 150$).

Пусть $k \leqslant N-3$. Рассмотрим мешок, в котором лежало a_k клубней после $(k+1)$-го хода (из него только что переложили картошку). Тогда перед $(k+1)$-м ходом в нём было $300 - a_{k+1}$ клубней, перед $(k+2)$-м ходом — a_{k+2} клубней, а перед $(k+3)$-м ходом — $300 - a_{k+3}$ клубней. На $(k+1)$-м ходе из этого мешка переложили $(300 - a_{k+1}) - a_k$ клубней, и это количество должно быть больше, чем количество клубней в нём перед $(k+3)$-м ходом. Итак, $300 - a_{k+3} < 300 - a_k - a_{k+1}$, откуда $a_{k+3} > a_{k+1} + a_k$; поскольку все числа целые, имеем $a_{k+3} \geqslant a_{k+1} + a_k + 1$.

Определим числа $b_0, b_1, b_2, \ldots$ так: $b_0 = b_1 = b_2 = 0$, $b_{k+3} = b_{k+1} + b_k + 1$. Тогда, поскольку $a_0, a_1, a_2 \geqslant 0$, из полученного неравенства непосредственной индукцией получается, что $a_k \geqslant b_k$ и $b_{k+1} \geqslant b_k$ при всех $k = 0,1,\ldots$. Значит, $b_N \leqslant a_N = 150$. Приведём таблицу первых значений чисел b_k:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b_k	0	0	0	1	1	2	3	4	6	8	11	15	20	27	36	48	64	85	113	150	199

Значит, из условия $b_N \leqslant 150$ получаем, что $N \leqslant 19$.

Пример, когда дети могут сделать 19 ходов, следует из построения выше. Изначально у каждого ребёнка по $b_{19} = 150$ клубней. Если дети будут действовать так, чтобы после k-го (с начала) хода у перекладывавшего оставалось ровно b_{19-k} клубней, то на k-м (с начала) ходе ребёнок будет перекладывать

$300 - b_{20-k} - b_{19-k}$ клубней, а перед любым предыдущим его ходом у него будет $300 - b_i$ клубней при $i \geqslant 17 - k$, причём $300 - b_i \leqslant 300 - b_{17-k} < 300 - b_{19-k} - b_{20-k}$. Значит, этот ход удовлетворяет условию, и дети могут сделать 19 таких ходов.

Замечание. Приведённый алгоритм — единственный, при котором дети смогут сделать 19 ходов.

9.4. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle D = 90^\circ$. Его диагонали пересекаются в точке E. Прямая ℓ пересекает отрезки AB, CD, AE и ED в точках X, Y, Z и T соответственно. Известно, что $AZ = CE$ и $BE = DT$. Докажите, что длина отрезка XY равна диаметру окружности, описанной около треугольника ETZ. (*А. Кузнецов, И. Фролов*)

Решение. Применяя теорему Менелая к треугольнику ETZ и секущим AXB и CYD, получаем

$$\frac{AZ}{AE} \cdot \frac{BE}{BT} \cdot \frac{XT}{XZ} = \frac{CE}{CZ} \cdot \frac{DT}{DE} \cdot \frac{YZ}{YT} = 1.$$

Из равенств $AZ = CE$ и $BE = DT$ следует, что $AE = CZ$ и $BT = DE$. Подставляя все эти равенства, получаем, что

$$\frac{XT}{XZ} = \frac{YZ}{YT};$$

это означает, что точки X и Y симметричны относительно середины S отрезка ZT (см. рис. 1).

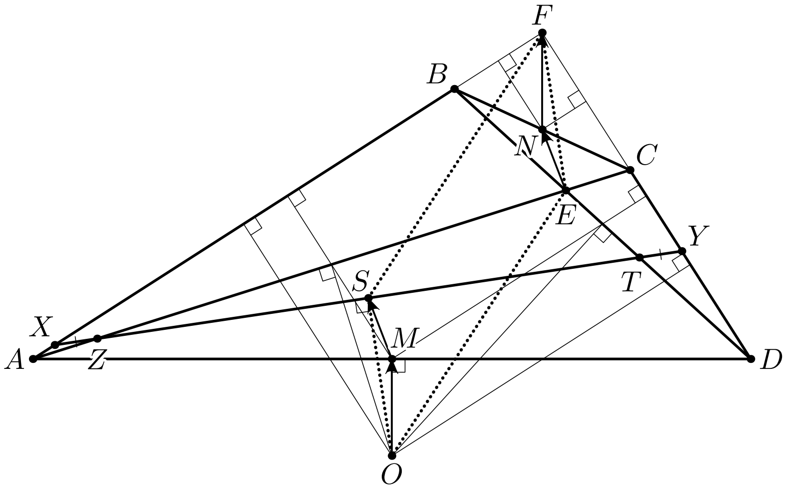

Рис. 1

Из условия следует, что лучи AD и BC пересекаются в некоторой точке F под прямым углом. Тогда в прямоугольном треугольнике XFY медиана FS равна половине гипотенузы XY.

Обозначим через M и N середины AD и BC соответственно, а через O — центр окружности $(ABCD)$. Тогда O — точка пересечения серединных перпендикуляров к AC и BD, которые совпадают с серединными перпендикулярами к EZ и ET соответственно. Значит, O — также центр окружности (ETZ), а OE — её радиус. Поэтому нам достаточно доказать, что $OE = FS$. Мы докажем, что $OEFS$ — параллелограмм, откуда это и следует.

Поскольку EN — медиана в треугольнике EBC, а MS — отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырёхугольника $AZTD$, имеем

$$\overrightarrow{EN} = \frac{\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}}{2} = \frac{\overrightarrow{DT} + \overrightarrow{AZ}}{2} = \overrightarrow{MS}.$$

В прямоугольном треугольнике FBC проекции вектора медианы $\overrightarrow{NF}$ на прямые BF и CF равны $\overrightarrow{BF}/2$ и $\overrightarrow{CF}/2$ соответственно. Поскольку O и M — центры окружностей $(ABCD)$ и (ADF) соответственно, при проекции на те же прямые первая попадает в середины отрезков AB и CD, а вторая — в середины AF и DF. Поэтому проекции вектора $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DO}$ на эти прямые равны $(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB})/2 = \overrightarrow{BF}/2$ и $(\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DC})/2 = \overrightarrow{CF}/2$. Значит, проекции векторов $\overrightarrow{NF}$ и $\overrightarrow{OM}$ на наши две прямые соответственно равны, откуда $\overrightarrow{NF} = \overrightarrow{OM}$.

Итак, $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{NF} + \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EF}$, откуда и следует, что $OEFS$ — параллелограмм.

Замечание. Есть и другие доказательства того, что $OEFS$ — параллелограмм. Например, можно использовать тот факт, что точки O и F изогонально сопряжены относительно треугольника ADE.

Также задачу можно решить, используя методы из решения задачи 10.4.

Критерии оценивания работ 9 класса

1 задача

- Доказано, что если n хорошее для Пети, то $n-2$ хорошее для Васи — 3 балла.
- Арифметическая ошибка в соответствии хороших чисел — снимается 1 балл.
- Не проверено, что 1 и 2 не являются хорошими числами для Пети — баллы не снимаются.
- Не проверено, что при соответствии сохраняются неравенства из условия на переменные a, b, c или x, y, z — баллы не снимаются.

2 задача

- Разобран только случай n, делящихся на 5 — 0 баллов.
- Разобран только случай нечетных n — 0 баллов.
- Доказано, что n обязательно четно и не кратно пяти — 1 балл.
- Рассмотрен случай $n \equiv 2 \pmod 4$ — 1 балл (суммируется с предыдущим).
- Доказано, что n обязательно делится на 16 — 3 балла.
- Если при рассмотрении канонических разложений n по степеням простых забыта или неверно разобрана бесконечная серия — не больше 4 баллов
- Не разобрано не более четырех конкретных чисел (например, 2^{49}, 5^{49}, $2 \cdot 5^{24}$, $5 \cdot 2^{24}, \ldots$) — снимается 1 балл.
- Разбор случаев $n = p^{49}$ и $n = p^{24}q$ не оценивался.
- Частичные продвижения в разборе случаев $n = p^4q^9$ или $n = p^4q^4r$ отдельно не оценивались.

3 задача

- Верный пример 19 ходов мальчиков — 3 балла.

  В работе могут оцениваться ***только*** следующие продвижения:
- Приводящие к верным примеру или оценке на 19 (а не другому количеству!) ходов (например, формула эквивалентная неравенству $a_n > a_{n+2} + a_{n+3}$).
- Полное доказательство оценки на 20 ходов.
- Верный пример на 18 ходов.

4 задача

- Доказано совпадение центров окружностей (ETZ) и $(ABCD)$ без дальнейших содержательных продвижений — 0 баллов.
- Доказано равенство отрезков XZ и TY — 1 балл.
- Замечено, что утверждение задачи сводится к тому, что $OEFS$ — параллелограмм (где O — центр описанной окружности, F — пересечение AB и CD, S — середина XY) — 1 балл.
- Через точку E проведены параллельные AB и CD и доказано, что полученные точки пересечения — концы диаметра, параллельного XY — 1 балл.