9 класс

9-1-1. Улитка ползёт по прямой. В первый день она проползает 1 м вперёд и 1/2 м назад. Во второй день она проползает 1/2 м вперёд и на 1/3 м назад. В третий день она проползает 1/3 м вперёд и 1/4 м назад и так далее. На каком расстоянии от точки старта она окажется в конце 74-го дня?

Ответ выразите в метрах.

Ответ. 74/75.

Решение варианта 1. Улитка окажется на расстоянии

$$\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{74}-\frac{1}{75}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{74}=\frac{74}{75}.$$

9-1-2. Улитка ползёт по прямой. В первый день она проползает 1 м вперёд и 1/2 м назад. Во второй день она проползает 1/2 м вперёд и на 1/3 м назад. В третий день она проползает 1/3 м вперёд и 1/4 м назад и так далее. На каком расстоянии от точки старта она окажется в конце 55-го дня?

Ответ выразите в метрах.

Ответ. 55/56.

9-1-3. Улитка ползёт по прямой. В первый день она проползает 1 м вперёд и 1/2 м назад. Во второй день она проползает 1/2 м вперёд и на 1/3 м назад. В третий день она проползает 1/3 м вперёд и 1/4 м назад и так далее. На каком расстоянии от точки старта она окажется в конце 44-го дня?

Ответ выразите в метрах.

Ответ. 44/45.

9-1-4. Улитка ползёт по прямой. В первый день она проползает 1 м вперёд и 1/2 м назад. Во второй день она проползает 1/2 м вперёд и на 1/3 м назад. В третий день она проползает 1/3 м вперёд и 1/4 м назад и так далее. На каком расстоянии от точки старта она окажется в конце 96-го дня?

Ответ выразите в метрах.

Ответ. 96/97.

9-2-1. Ненулевые числа a, b, c, d, e, f таковы, что среди произведений acd, ace, bde, bdf и bef ровно одно положительное. Какое?

Ответ. bde.

Решение варианта 1. Заметим, что $(ace)\cdot(bdf) = (acd)\cdot(bef)$. Поэтому ровно одно из этих четырёх чисел не может быть положительным. Значит, положительным является оставшееся число bde.

Комментарий. Есть примеры, когда произведение bde действительно положительно, а остальные — отрицательны. Например, $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $e > 0$, $f < 0$.

9-2-2. Ненулевые числа a, b, c, d, e, f таковы, что среди произведений acd, ace, bdf, bef и def ровно одно положительное. Какое?

Ответ. def.

9-2-3. Ненулевые числа a, b, c, d, e, f таковы, что среди произведений abc, aef, adf, bce и def ровно одно положительное. Какое?

Ответ. aef.

9-2-4. Ненулевые числа a, b, c, d, e, f таковы, что среди произведений abe, ade, bcf, bcd и cdf ровно одно положительное. Какое?

Ответ. bcd.

9-3-1. Числа от 1 до 217 разбиты на две группы: в одной 10 чисел, а в другой — —207. Оказалось, что средние арифметические чисел в двух группах равны. Найдите сумму чисел в группе из 10 чисел.

Ответ. 1090.

Решение варианта 1. Самое короткое решение этой задачи основано на следующем утверждении:

> Если средние арифметические чисел в двух группах равны, то этому же числу равняется и среднее арифметическое всех чисел.

Формальное его доказательство несложное: достаточно обозначить среднее арифметическое за S, количества чисел в группах через n и k; тогда суммы чисел в группах равны Sn и Sk, сумма всех чисел $S(n+k)$, т.е. их среднее арифметическое вновь S.

Однако мы призываем читателя понять, почему это утверждение «интуитивно очевидно». Например, нестрого можно думать о нём так: в первой группе числа «в среднем» по S, и во второй − тоже. Значит, если объединить обе группы в одну, то числа окажутся «в среднем» по S.

Перейдём к решению задачи. По нашему утверждению среднее арифметическое в каждой группе равно среднему арифметическому чисел от 1 до 217, а оно, как несложно проверить, равно 109. Поэтому ответ $109 \cdot 10 = 1090$.

9-3-2. Числа от 1 до 269 разбиты на две группы: в одной 100 чисел, а в другой —— 169. Оказалось, что средние арифметические чисел в двух группах равны. Найдите сумму чисел в группе из 100 чисел.

Ответ. 13500.

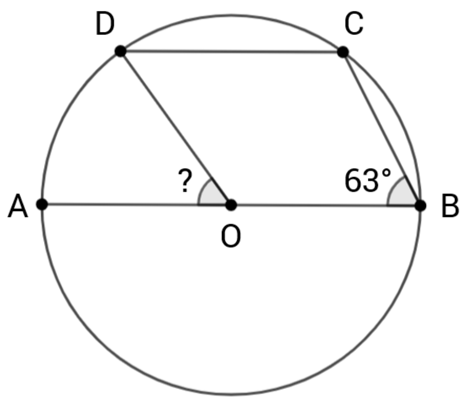
9-3-3. Числа от 1 до 361 разбиты на две группы: в одной 10 чисел, а в другой — 351. Оказалось, что средние арифметические чисел в двух группах равны. Найдите сумму чисел в группе из 10 чисел.

Ответ. 1810.

9-3-4. Числа от 1 до 311 разбиты на две группы: в одной 100 чисел, а в другой — 211. Оказалось, что средние арифметические чисел в двух группах равны. Найдите сумму чисел в группе из 100 чисел.

Ответ. 15600.

9-4-1. На рисунке O — центр окружности, $AB \parallel CD$. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».

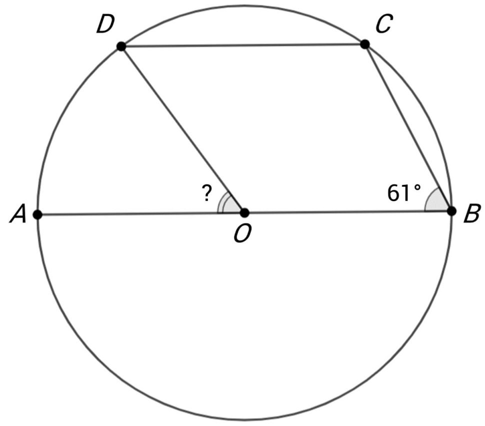


Ответ. 54°.

Решение варианта 1. Четырёхугольник $ADCB$ — вписанная в окружность трапеция. Как известно, такая трапеция является равнобокой, а в равнобокой трапеции углы при основании равны: $\angle BAD = \angle CBA = 63°$. Треугольник DOA — равнобедренный (OA и OD равны как радиусы), значит, его углы при основании DAO и ADO равны. Следовательно,

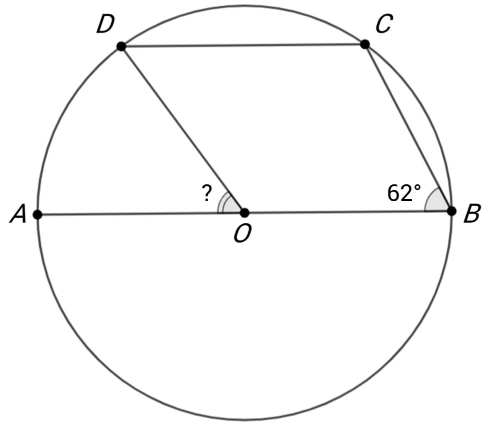
$$\angle DOA = 180° - \angle DAO - \angle ADO = 180° - 63° - 63° = 54°.$$

9-4-2. На рисунке O – центр окружности, $AB \parallel CD$. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».



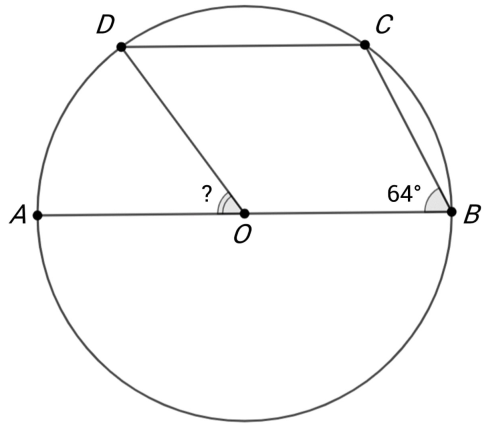
Ответ. 58°.

9-4-3. На рисунке O – центр окружности, $AB \parallel CD$. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».



Ответ. 56°.

9-4-4. На рисунке O – центр окружности, $AB \parallel CD$. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».



Ответ. 52°.

9-5-1. На доске записаны числа 1 и 7. За одно действие к обоим числам на доске прибавляется их наибольший общий делитель. Например, если в какой-то момент на доске будут числа 20 и 50, то они заменятся на числа 30 и 60.

Какие числа будут на доске после 100 действий? Ответы укажите в любом порядке.

Ответ. 588 и 594.

Решение варианта 1. Проделаем первые несколько действий, описанных в условии.

действий	первое число	второе число	их НОД
ни одного	1	7	1
после первого	2	8	2
после второго	4	10	2
после третьего	6	12	6
после четвёртого	12	18	6

Заметим, что при всех следующих действиях к обоим числам будет прибавляться по 6, так как разность чисел всегда будет равна 6, и каждое из них будет делиться на 6.

Так как после третьего действия первое число равно 6, а мы с ним проделаем ещё 97 действий, то оно станет равно $98 \cdot 6 = 588$, а второе число тогда окажется равным $588 + 6 = 594$.

Комментарий. Можно доказать, что, начав описанную операцию с любой пары чисел $a \neq b$, мы рано или поздно получим оба числа, делящиеся на $a - b$.

9-5-2. На доске записаны числа 1 и 9. За одно действие к обоим числам на доске прибавляется их наибольший общий делитель. Например, если в какой-то момент на доске будут числа 20 и 50, то они заменятся на числа 30 и 60.

Какие числа будут на доске после 100 действий? Ответы укажите в любом порядке.

Ответ. 784 и 792.

9-5-3. На доске записаны числа 3 и 13. За одно действие к обоим числам на доске прибавляется их наибольший общий делитель. Например, если в какой-то момент на доске будут числа 20 и 50, то они заменятся на числа 30 и 60.

Какие числа будут на доске после 100 действий? Ответы укажите в любом порядке.

Ответ. 970 и 980.

9-5-4. На доске записаны числа 2 и 11. За одно действие к обоим числам на доске прибавляется их наибольший общий делитель. Например, если в какой-то момент на доске будут числа 20 и 50, то они заменятся на числа 30 и 60.

Какие числа будут на доске после 100 действий? Ответы укажите в любом порядке.

Ответ. 882 и 891.

9-6-1. Шесть пиратов – капитан и пять членов его команды – сидят вокруг костра лицом к центру. Им надо поделить сокровище: 180 золотых монет. Капитан предлагает способ дележа (т.е. сколько должен получить каждый пират: каждому достанется целое неотрицательное число монет; разные пираты могут получить разное количество монет). После этого остальные пять пиратов голосуют за предложение капитана. Пират проголосует «за», только если он получит больше монет, чем каждый из двух его соседей. Предложение принимается, если «за» проголосуют хотя бы три из пяти членов команды.

Какое наибольшее количество монет может получить капитан при таком способе дележа?

Ответ. 59.

Решение варианта 1. Пронумеруем пиратов по часовой стрелке, начиная с капитана: Первый, Второй, ..., Пятый. Главное наблюдение в этой задаче такое:

> два пирата, сидящие рядом, не могут оба проголосовать «за»: кому-то из них капитан предлагает не больше, чем соседу, он-то и не проголосует «за».

Поэтому, для того, чтобы трое проголосовали «за», это должны быть Первый, Третий и Пятый – доказательство этого факта вынесено в комментарий. Тогда, если капитан оставляет себе x монет, то Первому и Пятому он должен предложить хотя бы $x + 1$ монету, а Третьему – хотя бы 1, чтобы они проголосовали «за». Итак, всего монет должно быть хотя бы $3x + 3$, откуда $3x + 3 \leqslant 180$, $x \leqslant 59$.

Заметим, что пока что мы доказали только, что капитан не может получить больше 59 монет. Из нашего рассуждения легко получить пример ситуации, когда он может получить ровно 59: для этого достаточно Первому и Пятому предложить по 60 монет, Третьему – одну, а Второму и Четвёртому – ничего.

Комментарий. Интуитивно понятное утверждение про Первого, Третьего и Пятого строго доказывается через *разбиение на пары*. Из пары Первый-Второй «за» проголосует не более одного, так же как и из пары Третий-Четвёртый. Поэтому Пятый точно должен голосовать «за». Аналогично Первый должен голосовать «за». Но тогда Второй и Четвёртый – не голосуют «за», поэтому Третий голосует «за».

9-6-2. Шесть пиратов – капитан и пять членов его команды – сидят вокруг костра лицом к центру. Им надо поделить сокровище: 120 золотых монет. Капитан предлагает способ дележа (т.е. сколько должен получить каждый пират: каждому достанется целое неотрицательное число монет; разные пираты могут получить разное количество монет). После этого остальные пять пиратов голосуют за предложение капитана. Пират проголосует «за», только если он получит больше монет, чем каждый из двух его соседей. Предложение принимается, если «за» проголосуют хотя бы три из пяти членов команды.

Какое наибольшее количество монет может получить капитан при таком способе дележа?

Ответ. 39.

9-6-3. Шесть пиратов – капитан и пять членов его команды – сидят вокруг костра лицом к центру. Им надо поделить сокровище: 150 золотых монет. Капитан предлагает способ дележа (т.е. сколько должен получить каждый пират: каждому достанется целое неотрицательное число монет; разные пираты могут получить разное количество монет). После этого остальные пять пиратов голосуют за предложение капитана. Пират проголосует «за», только если он получит больше монет, чем каждый из двух его соседей. Предложение принимается, если «за» проголосуют хотя бы три из пяти пиратов.

Какое наибольшее количество монет может получить капитан при таком способе дележа?

Ответ. 49.

9-6-4. Шесть пиратов – капитан и пять членов его команды – сидят вокруг костра лицом к центру. Им надо поделить сокровище: 90 золотых монет. Капитан предлагает способ дележа (т.е. сколько должен получить каждый пират: каждому достанется целое неотрицательное число монет; разные пираты могут получить разное количество монет). После этого остальные пять пиратов голосуют за предложение капитана. Пират проголосует «за», только если он получит больше монет, чем каждый из двух его соседей. Предложение принимается, если «за» проголосуют хотя бы три из пяти членов команды.

Какое наибольшее количество монет может получить капитан при таком способе дележа?

Ответ. 29.

9-7-1. Уравнение $x^4 - 7x - 3 = 0$ имеет ровно два действительных корня a и b, $a > b$. Найдите значение выражения $\dfrac{a-b}{a^4-b^4}$.

Ответ. 1/7.

Решение варианта 1. То, что a и b – корни уравнения, просто означает, что $a^4 = 7a + 3$ и $b^4 = 7b + 3$. Откуда

$$\frac{a-b}{a^4-b^4} = \frac{a-b}{(7a+3)-(7b+3)} = \frac{a-b}{7(a-b)} = \frac{1}{7}.$$

В качестве комментария отметим, что уравнение из условия действительно имеет два вещественных корня.

9-7-2. Уравнение $x^4 - 6x - 5 = 0$ имеет ровно два действительных корня a и b, $a > b$. Найдите значение выражения $\dfrac{a-b}{a^4-b^4}$.

Ответ. 1/6.

9-7-3. Уравнение $x^4 - 11x + 3 = 0$ имеет ровно два действительных корня a и b, $a > b$. Найдите значение выражения $\dfrac{a-b}{a^4-b^4}$.

Ответ. $1/11$.

9-7-4. Уравнение $x^4 - 13x + 4 = 0$ имеет ровно два действительных корня a и b, $a > b$. Найдите значение выражения $\dfrac{a-b}{a^4-b^4}$.

Ответ. $1/13$.

9-8-1. В Междуграде вдоль одной стороны улицы стоят дома, каждый дом может иметь $1, 2, 3, \ldots, 9$ этажей. Согласно древнему закону Междуграда, если два дома на одной стороне улицы имеют одинаковое количество этажей, то, как бы далеко они ни находились друг от друга, между ними должен быть дом с бОльшим количеством этажей. Чему равно максимально возможное число домов на одной стороне улицы в Междуграде?

Ответ. 511.

Решение варианта 1. *Оценка.* Пусть a_k – максимальное число домов, если все они имеют не более k этажей. Ясно, что $a_1 = 1$. Найдем a_k. Рассмотрим самый высокий дом с k этажами, он по условию только один. И слева, и справа от него стоят дома

с $1, 2, 3, \ldots, k-1$ этажами, и для домов с каждой стороны выполняется древний закон Междуграда для $(k-1)$-этажных домов. Поэтому всего домов не более $a_{k-1} + 1 + a_{k-1}$ (дома слева, самый высокий дом с k этажами, дома справа). Итак, $a_k \leqslant 1 + 2a_{k-1}$. Посчитаем по этой формуле: $a_2 \leqslant 1 + 2 \cdot 1 = 3$; $a_3 \leqslant 1 + 2 \cdot 3 = 7$; $a_4 \leqslant 1 + 2 \cdot 7 = 15$,... Можно заметить закономерность $a_m \leqslant 2^m - 1$, откуда $a_9 \leqslant 2^9 - 1 = 511$.

Пример. Вдоль улицы могут стоять дома

$$1213121412131215121312141213121 6....,$$

всего $2^9 - 1 = 511$ домов.

Этот пример строится из оценки: ставим 9-этажный дом по центру, а слева и справа от него пишем примеры для не более чем 8-этажных домов. Эти примеры для не более чем 8-этажных домов строим так же: по центру ставим 8-этажный дом, слева и справа от него пишем примеры для не более чем 7-этажных домов, и т.д. В итоге получается пример выше.

9-8-2. В Междуграде вдоль одной стороны улицы стоят дома, каждый дом может иметь $1, 2, 3, \ldots, 7$ этажей. Согласно древнему закону Междуграда, если два дома на одной стороне улицы имеют одинаковое количество этажей, то как бы далеко они ни находились друг от друга, между ними должен быть дом с бОльшим количеством этажей. Чему равно максимально возможное число домов на одной стороне улицы в Междуграде?

Ответ. 127.

9-8-3. В Междуграде вдоль одной стороны улицы стоят дома, каждый дом может иметь $1, 2, 3, \ldots, 8$ этажей. Согласно древнему закону Междуграда, если два дома на одной стороне улицы имеют одинаковое количество этажей, то как бы далеко они ни находились друг от друга, между ними должен быть дом с бо́льшим количеством этажей. Чему равно максимально возможное число домов на одной стороне улицы в Междуграде?

Ответ. 255.

9-8-4. В Междуграде вдоль одной стороны улицы стоят дома, каждый дом может иметь $1, 2, 3, \ldots, 10$ этажей. Согласно древнему закону Междуграда, если два дома на одной стороне улицы имеют одинаковое количество этажей, то как бы далеко они ни находились друг от друга, между ними должен быть дом с бо́льшим количеством этажей. Чему равно максимально возможное число домов на одной стороне улицы в Междуграде?

Ответ. 1023.