7 класс

7.1 Резонансное затмение

Известно, что спутники Юпитера Ио, Европа и Ганимед находятся в орбитальном резонансе 4 : 2 : 1. Иными словами, их периоды обращения вокруг Юпитера соотносятся как целые числа, причём период обращения Европы в 2 раза больше, чем у Ио, но в 2 раза меньше, чем у Ганимеда. Также известно, что все три спутника обращаются в одной плоскости и могут отбрасывать тень на поверхность Юпитера.

Какое минимальное и максимальное количество «двойных» (то есть происходящих одновременно) солнечных затмений, вызванных этими спутниками, может произойти на Юпитере за один оборот Ганимеда? Заметим, что «тройных» затмений при этом не бывает.

Возможное решение. Периоды обращения спутников Юпитера существенно меньше, чем его период обращения вокруг Солнца: несколько дней против почти 12 лет. Поэтому возможно пренебречь орбитальным движением Юпитера и считать, что затмения Солнца каждым из спутников повторяются ровно через один оборот этого спутника вокруг Юпитера.

Так как периоды обращения спутников соотносятся как целые числа, спутники «встречаются» (выстраиваются в одну линию с центром Юпитера) всегда в одних и тех же точках своих орбит. Так, Ио и Европа имеют одно фиксированное «место встречи», и между «встречами» проходит ровно два оборота Ио и один оборот Европы. Аналогичная ситуация происходит для Европы и Ганимеда. У Ио и Ганимеда точек «встречи» несколько; желающие могут рассчитать, что их три: за период обращения Ганимеда Ио совершает 4 оборота, то есть на 3 оборота больше, чем Ганимед.

(a) Резонанс 2 : 1 (b) Резонанс 4 : 1

Рис. 1: «Места встречи» пары спутников

Двойное солнечное затмение происходит, когда точка «встречи» двух спутников оказывается между Солнцем и Юпитером. Отсутствие тройных затмений означает, что справедливо одно из двух утверждений:

1) Все точки «встречи» различны. Тогда за один оборот Ганимеда возможно наблюдать затмения только от какой-то одной пары спутников: другие точки «встречи» будут удалены от линии «Солнце – Юпитер». Очевидно, можно сразу отбросить сближения с Ганимедом: он повторно окажется в точке сближения с любым другим спутником только через свой орбитальный период, по окончании обозначенного времени. Поэтому нас интересует пара Ио – Европа.

Пусть затмение произошло в «нулевой» момент времени. Следующее двойное затмение произойдёт через 1 оборот Европы и 2 оборота Ио. При этом пройдёт половина периода обращения Ганимеда. Следующее (третье) двойное затмение произойдёт через такой же промежуток времени, и Ганимед завершит свой оборот (рис. 2). Так как затмения не являются мгновенными событиями и имеют некоторую длительность, можно включить в расчёт затмения на обоих «концах» рассматриваемого периода. Следовательно, в такой ситуации максимальное количество затмений равно трём.

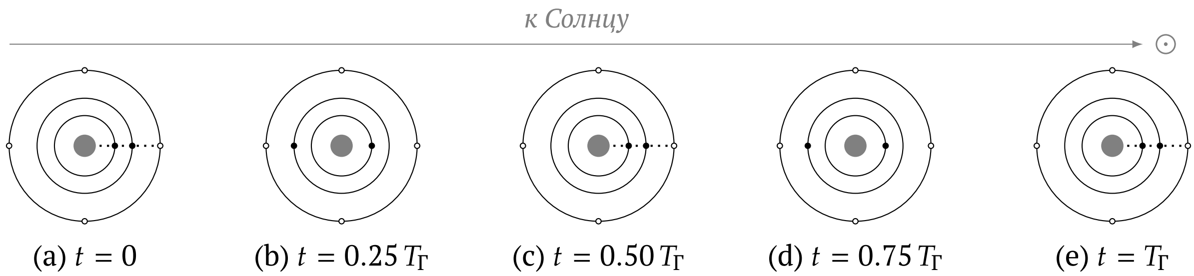


Рис. 2: «Двойные» затмения в описанной ситуации.
Положение Ганимеда — любое, *кроме* отмеченных («выколотых»).
Сдвиг на $t = 0.50\,T_Г$ в любом направлении не изменяет картину

2) Некоторые точки «встречи» совпадают, но ***спутники не могут оказаться там одновременно.*** Дело в том, что резонанс позволяет иметь трём спутникам общее место «встречи», но при этом одновременно в ней будет находиться не более двух из них. Более того, именно этот случай и реализуется в реальной жизни†: место «встречи» Ио и Европы совпадает с одной из трёх точек сближения Ио и Ганимеда.

†Средние орбитальные долготы Ио, Европы и Ганимеда связаны: $\lambda_И - 3\lambda_E + 2\lambda_Г = 180°$ с хорошей точностью. Это соотношение «блокирует» для этих спутников возможность «сойтись» на одном луче с началом в центре Юпитера — примечательная особенность резонанса этих трёх галилеевых спутников.

Два из четырёх «выколотых» на рис. 2 положений Ганимеда запрещены условием об отсутствии «тройных» затмений:

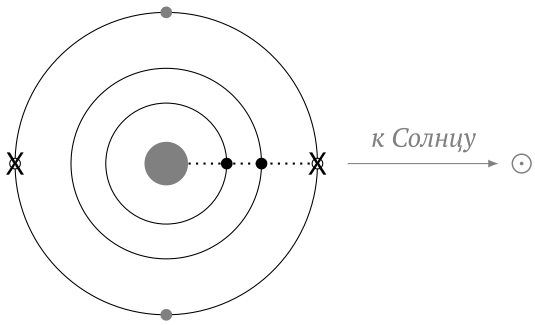
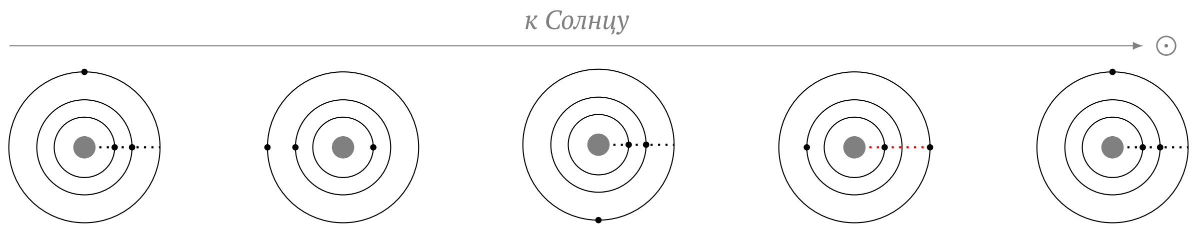


Рис. 3: Запрещённые положения Ганимеда в моменты $t = 0$ или $t = 0.50 T_Г$

А вот вторая пара положений вполне допустима (и даже жизненна). Поэтому возможен **максимальный вариант с четырьмя «двойными» затмениями:** в описанную в варианте 1 цепочку затмений добавляется ещё одно — при соединении Ганимеда и Ио в момент времени $t = 0.25\, T_Г$ или $t = 0.75\, T_Г$ (ср. рис. 4 с рис. 2).



(a) $t = 0$ (b) $t = 0.25\, T_Г$ (c) $t = 0.50\, T_Г$ (d) $t = 0.75\, T_Г$ (e) $t = T_Г$

Рис. 4: «Двойные» затмения: движение спутников в максимальном случае.
Сдвиг на $t = 0.50\, T_Г$ в любом направлении не изменяет картину

В зависимости от положения Юпитера на орбите вблизи линии «Солнце – Юпитер» может вообще не оказаться точек «встречи». Тогда двойные затмения какое-то время не будут наблюдаться; **минимальное количество «двойных» затмений равно нулю.**

Критерии оценивания:

1	Солнечное затмение наблюдается, когда спутник оказывается между Солнцем и Юпитером	1
2	Резонанс фиксирует точки «встречи» спутников	1
3	Поскольку «тройные» затмения не наблюдаются, все точки «встречи» различны (либо спутники не могут оказаться в них одновременно). *Балл выставляется, если рассмотрен хотя бы один из вариантов.*	1
4	Обоснование и результат для минимального количества затмений	1 + 1
5	Обоснование и результат для максимального количества затмений. *Полный балл выставляется, если рассмотрен хотя бы один из вариантов — с результатом 3 или 4 «двойных» затмения.*	2 + 1
	Всего	**8**

Баллы за отдельные ответы без надлежащего и корректного обоснования (хотя бы и неполного) ***не выставляются,*** *даже если ответы угаданы верно.*

7.2 Космические гонки

Анализируя спектр источника излучения, можно определить скорость его приближения или удаления относительно наблюдателя. Находясь на Земле, астроном изучает внесолнечную планетную систему — звезду с обращающейся вокруг неё экзопланетой. Орбита экзопланеты находится в плоскости орбиты Земли и видна «с ребра». Астроном обнаружил, что звезда приближается к Солнечной системе со скоростью 10 км/с, а скорость обращения экзопланеты вокруг этой звезды равна 20 км/с.

С какой максимальной скоростью экзопланета может приближаться к Земле? Удаляться от неё? Чему равна минимальная (по модулю) скорость экзопланеты относительно Земли? Земля обращается вокруг Солнца со скоростью 30 км/с.

Возможное решение. Скорость экзопланеты относительно Земли складывается из трёх *независимых* компонент:

- орбитальной скорости экзопланеты v_p относительно звезды,
- скорости звезды v_r относительно Солнечной системы,
- орбитальной скорости Земли $v_\oplus$ относительно Солнца.

При этом первая и последняя компоненты меняются в зависимости от положения экзопланеты и Земли на своих орбитах: так, в некоторый момент времени Земля будет двигаться со скоростью 30 км/с по направлению к звезде, а через полгода — с той же скоростью удаляться от неё.

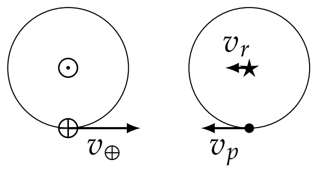
Для начала определим возможные значения скорости экзопланеты относительно Солнечной системы, то есть без учёта движения Земли. Если экзопланета к нам приближается, то её орбитальная скорость складывается со скоростью звезды, так что максимальная скорость приближения к Солнцу равна $v_p + v_r = 20 + 10 = 30$ км/с. Если экзопланета удаляется, то с учётом скорости звезды получаем наибольшую возможную гелиоцентрическую скорость удаления $v_p - v_r = 20 - 10 = 10$ км/с.

Теперь учтём скорость Земли. **Максимальная скорость сближения** получится, если Земля будет двигаться навстречу экзопланете: итоговая скорость сближения составит

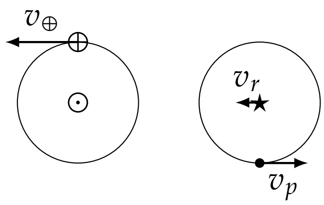
$$v_p + v_r + v_\oplus = 30 + 30 = \mathbf{60\ км/с.}$$

Для максимизации скорости удаления скорость Земли должна быть направлена от звезды; **наибольшая скорость удаления** экзопланеты от Земли составит

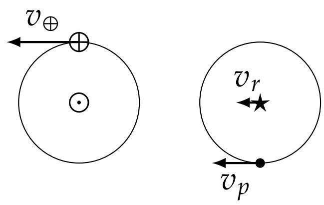
$$v_p - v_r + v_\oplus = 10 + 30 = \mathbf{40\ км/с.}$$



(a) Максимальная возможная скорость сближения



(b) Максимальная возможная скорость удаления



(c) Минимальный модуль относительной скорости

Рис. 5: Различные конфигурации Земли и экзопланеты

Заметим, что если скорость экзопланеты направлена к Солнцу, а скорость Земли — от звезды (то есть в том же направлении), то результирующая скорость экзопланеты относительно Земли равна

$$v_p + v_r - v_\oplus = 30 - 30 = \mathbf{0\ км/с,}$$

что и является **минимально возможной по модулю скоростью.**

Критерии оценивания:

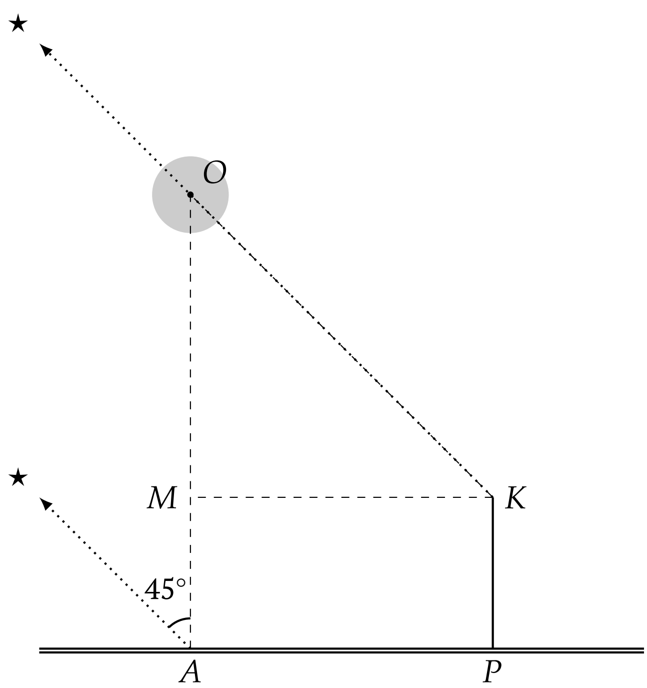
1	Скорость экзопланеты относительно Земли складывается из трёх компонент	2
2	Максимальная скорость сближения: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
3	Максимальная скорость удаления: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
4	Минимальный модуль относительной скорости экзопланеты: описание/рисунок ситуации и ответ	1 + 1
	Всего	**8**

7.3 Таинственный остров

Любитель ночных пейзажей решил сфотографировать небольшой остров в море на фоне звёздного неба. Он обнаружил, что при съёмке из точки A, ближайшей к острову точки прямого берега, Полярная звезда наблюдается в 45° к западу от острова. Следующей ночью наблюдатель решил сфотографировать остров с крайней точки пирса, расположенного в 300 метрах от точки A. Полярная звезда при этом оказалась прямо над островом. Определите расстояние от берега до острова, если известно, что пирс перпендикулярен береговой линии и имеет длину 50 метров.

Словарь. Пирс — сооружение, выступающее в акваторию водоёма и служащее для швартовки судов или в рекреационных целях (купание, рыбалка и т. п.).

Возможное решение. Изобразим описанную в условии ситуацию на чертеже:



Точка A — ближайшая к острову O точка берега, поэтому прямая OA перпендикулярна береговой линии. Пусть P — основание пирса и K — его крайняя точка. Опустим из точки K перпендикуляр KM на прямую OA. В результате получаем прямоугольник $AMKP$, где $KM = AP = 300$ м, $AM = KP = 50$ м.

Поскольку Полярная звезда (★) является очень далёким объектом и указывает направление на север как из точки A, так и с края пирса, прямые $A\star$ и $K\star$ параллельны. Следовательно, $\angle MOK = 45°$, и прямоугольный треугольник OKM — равнобедренный, так что $OM = KM = 300$ м.

В результате получаем, что расстояние от берега до острова есть

$$AM + OM = 50 + 300 = \mathbf{350\ м.}$$

Критерии оценивания:

1	Корректный чертёж: геометрия чертежа позволяет определить искомое расстояние	2
2	Направления на Полярную параллельны	1
3	***Пирс с правильной стороны***	1
4	Выделение прямоугольника	1
5	Решение треугольника	2
6	Ответ	1
	Всего	**8**

7.4 Тяжёлая вода

Внесолнечная планета Kepler-62 e, обнаруженная у звезды Kepler-62 в созвездии Лиры, считается возможной планетой-океаном. Масса планеты равна 4.5 массам Земли, радиус составляет 1.6 радиуса Земли. Во сколько раз средняя плотность планеты больше плотности воды? Средняя плотность Земли составляет 5.5 г/см^3.

Возможное решение. Будем считать экзопланету шарообразной. Тогда её объём связан с радиусом соотношением

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Средняя плотность планеты есть отношение её массы к объёму:

$$\rho := \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,.$$

Определим отношение средних плотностей планеты и Земли:

$$\frac{\rho}{\rho_\oplus} = \frac{M/V}{M_\oplus/V_\oplus} = \frac{M}{M_\oplus}\cdot\frac{V_\oplus}{V} = \frac{M}{M_\oplus}\cdot\frac{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_\oplus^3}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R^3} = \frac{M}{M_\oplus}\cdot\left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^3 = \frac{4.5}{1}\times\left(\frac{1}{1.6}\right)^3 = 1.1.$$

Тогда плотность планеты составит $1.1 \times 5.5 \approx 6$ г/см^3, что **в 6 раз выше плотности воды,** равной 1.0 г/см^3.

Отметим, что для решения задачи достаточно понимания того, что объём шара пропорционален кубу радиуса, так что средняя плотность

$$\rho \propto \frac{M}{R^3}\,.$$

Коэффициент пропорциональности сокращается при вычислении отношения плотностей. Допустимо также рассчитать среднюю плотность планеты непосредственно:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{4.5 M_\oplus}{\frac{4}{3}\pi(1.6R_\oplus)^3} = \frac{4.5\times 5.974\cdot 10^{24}\ \text{кг}}{\frac{4}{3}\pi\times(1.6\times 6.37\cdot 10^6\ \text{м})^3} \approx 6\cdot 10^3\ \text{кг/м}^3 = 6\ \text{г/см}^3.$$

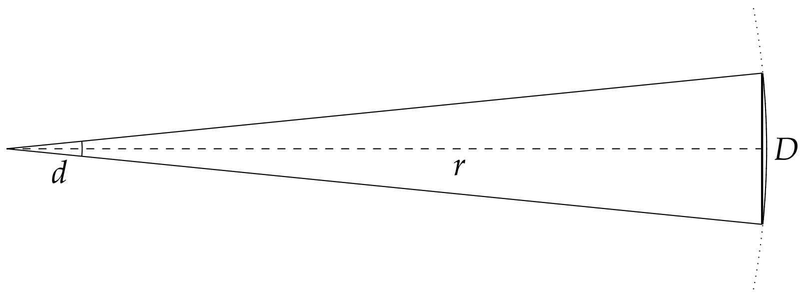
Критерии оценивания:

1	Утверждение о пропорциональности $V \propto R^3$ ***либо*** выражение для объёма $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ или аналог	2
	Неверный коэффициент, если приводится равенство	*−1*
	Неверный показатель степени	*−2*
2	Утверждение о пропорциональности $\rho \propto MV^{-1}$ ***либо*** выражение $\rho = M/V$	2
3	Вычисление плотности планеты непосредственно или в сравнении с Землёй ***исходя из формул участника***, допустима погрешность 10 %	3
	Арифметическая ошибка	*−1*
4	Вычисление отношения плотности планеты и воды ***исходя из полученного участником значения*** плотности, допустима погрешность 10 %	1
	Всего	**8**

7.5 Глизе не отвести

В далёком будущем исследователи космоса высаживаются на поверхность планеты Gliese 581 c, обращающейся вокруг звезды Gliese 581 на расстоянии 0.07 а. е. Радиус звезды составляет 0.3 радиуса Солнца. Каким будет видимый угловой диаметр звезды при наблюдении с планеты?

Возможное решение. Угловой размер — это угол d, под которым объект с линейным размером D видит наблюдатель, удалённый на расстояние r.



В случае малого углового размера (центрального угла) дуга окружности радиусом r при малом центральном угле d неотличима от стягивающей её хорды. Длина дуги окружности прямо пропорциональна соответствующему ей центральному углу, а полному углу в 360° соответствует длина всей окружности $2\pi r$.

В таком случае для длины хорды справедливо выражение

$$D \approx 2\pi r \cdot \frac{d}{360^\circ},$$

и угловой размер возможно рассчитать как

$$d = \frac{D}{r} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi}.$$

Осуществим подстановку:

$$d = \frac{2 \cdot 0.3 R_\odot}{0.07 \text{ а. е.}} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{2 \times 0.3 \times 697 \cdot 10^3 \text{ км}}{0.07 \times 1.496 \cdot 10^8 \text{ км}} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} \approx \mathbf{2.3^\circ}.$$

Альтернативное решение. Известно, что видимый с Земли угловой диаметр Солнца составляет $32' \approx 0.5°$.

Определим, во сколько раз отличаются видимые размеры Gliese 581 при наблюдении с планеты Gliese 581 c и Солнца при наблюдении с Земли, считая, что $d \propto D/r$:

$$\frac{d}{d_\odot} = \frac{D/r}{D_\odot/r_\odot} = \frac{D}{D_\odot} \cdot \frac{r_\odot}{r} = \frac{2 \cdot 0.3 R_\odot}{2R_\odot} \times \frac{1\ \text{а. е.}}{0.07\ \text{а. е.}} = \frac{0.3}{0.07} \approx 4.3.$$

Тогда видимый диаметр звезды окажется равным $4.3 \times 32' = 138' = 2.3°$.

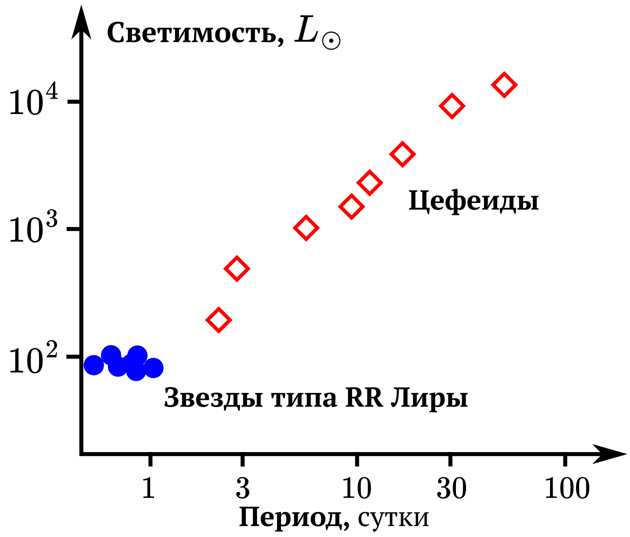
Критерии оценивания:

1	Утверждение о пропорциональности видимого размера радиусу звезды ***либо*** использование такой пропорциональности в формуле	2
2	Утверждение о обратной пропорциональности видимого размера расстоянию до звезды ***либо*** использование такой пропорциональности в формуле	2
3	Вычисление отношения видимых размеров звезды и Солнца и вычисление углового диаметра звезды (в угловых минутах или других единицах измерения углов) ***либо*** вычисление угловых размеров иным корректно обоснованным способом, допустима погрешность 10 %	2 + 2
	Участник перепутал радиус и диаметр	*−2*
	Арифметическая ошибка	*−1*
	Всего	**8**

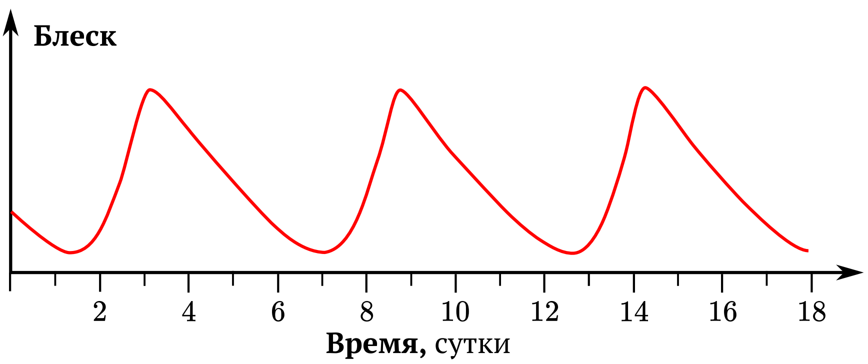
7.6 Ветер перемен

Некоторые звёзды периодически изменяют свой блеск, причём период колебаний может быть напрямую связан со средней светимостью звезды (количеством энергии, которую звезда излучает за единицу времени).

На рисунке справа представлена зависимость «период — светимость» для двух типов переменных звёзд. Светимость выражена в светимостях Солнца $L_\odot$.

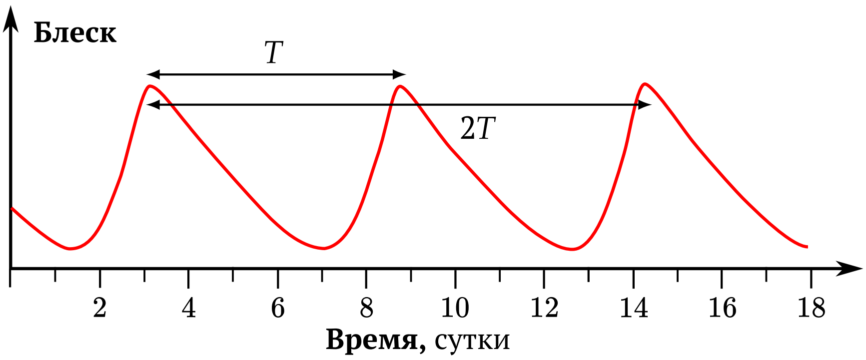


Вам также дана кривая блеска (рис. ниже) — зависимость блеска некоторой звезды от времени. Определите период изменения блеска этой звезды. К какому из двух типов переменных она принадлежит? Объясните свой выбор.



Возможное решение. Период — это наименьший промежуток времени, через который система возвращается в исходное состояние. На графике это соответствует минимальному промежутку времени между двумя точками, когда блеск звезды одинаков и дальнейшее его изменение носит также одинаковый характер. Например, за период T можно принять промежуток времени между двумя последовательными минимумами или двумя последовательными максимумами.

Чтобы уменьшить влияние погрешностей измерений, имеет смысл измерить отрезок в несколько периодов, а потом разделить полученный результат на соответствующее количество периодов. Впрочем, *в этой* задаче выбор метода на точность существенно не повлияет.



Для начала определим масштаб изображения с помощью линейки. Пусть путём измерений получили, что отрезок в 18 суток (от 0 до 18 сут. по оси абсцисс) равен X мм (не будем приводить конкретное значение: оно может получиться разным в зависимости от настроек печати организаторов). Теперь измерим отрезок между первым и третьим максимумами на графике, получим Y мм. В этот отрезок укладывается два полных периода изменения блеска. Продолжительность одного периода равна

$$Y \cdot \frac{18}{X} \cdot \frac{1}{2} \approx \mathbf{5.6\ сут.}$$

Как видно из диаграммы «период — светимость», переменные типа RR Лиры являются короткопериодическими: характерный период изменения их блеска практически не превышает 1 суток. Сделаем вывод, что наша переменная принадлежит к классу **цефеид.**

Кстати, оба типа переменных широко используются в астрономии в качестве «стандартных свечей»: известная светимость позволяет определить расстояние до них.

Критерии оценивания:

а1	Описание метода определения периода	2
а2	Масштаб графика (хотя бы неявно)	2
а3	Период от 5.5 до 5.7 сут. *(от 5 до 6 сут.)*	3 *1*
б	Тип переменной ***с обоснованием***	3
	Всего	**10**