

## 9 класс

### Задача №9-Т1. Лифт

Лифт преодолевает необходимую дистанцию ( $n$  этажей высотой  $l_0$  каждый) за минимально возможное время  $t$ , если разгоняется с ускорением  $a_0$  до скорости  $v_0$ , далее движется с постоянной скоростью  $v_0$  в течение времени  $t - \frac{2v_0}{a_0}$  и тормозит до полной остановки за время  $\frac{v_0}{a_0}$ .

Начертим соответствующий график скорости лифта от времени. Площадь под ним пропорциональна пройденному пути:

$$nl_0 = \frac{t + (t - \frac{2v_0}{a_0})}{2} v_0$$

Откуда

$$t(n) = \frac{nl_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$$

Однако эта формула верна лишь при  $t - \frac{2v_0}{a_0} > 0$ , т.е. только в том случае, когда лифт успевает достичь максимальной скорости  $v_0$  по скорости. Это условие можно переписать в виде:  $n > \frac{v_0^2}{a_0 l_0}$ .

Если лифт не успевает достичь максимальной скорости  $v_0$ , то оптимальным по времени становится следующая стратегия зависимости скорости от времени. Необходимо половину времени ускоряться с  $a_0$  и половину времени замедляться с тем же по модулю ускорением. График зависимости скорости от времени представлен на рисунке.

В этом случае пройденный путь равен

$$nl_0 = \frac{a_0 t}{2} t$$

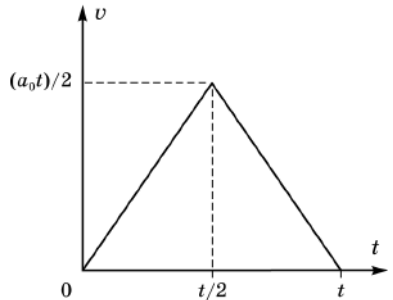
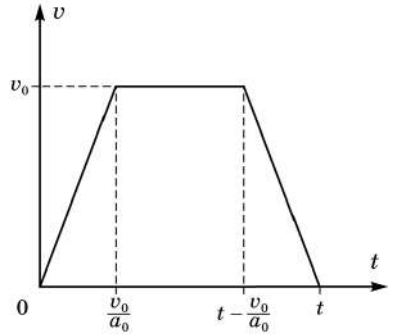
Откуда

$$t(n) = 2\sqrt{\frac{nl_0}{a_0}}$$

По условию, обе точки принадлежат случаю  $t(n) = \frac{nl_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$  :  $\begin{cases} t_2 = \frac{2l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} \\ t_4 = \frac{4l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} \end{cases}$

Тогда

$$t_3 = \frac{3l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} = \frac{t_2 + t_4}{2} = 6,5 \text{ с}$$



Из системы найдем  $n_{\text{крит}} = \frac{v_0^2}{a_0 l_0} = \frac{2(2t_2 - t_4)}{t_4 - t_2} = \frac{4}{3} > 1$ , то есть при подъеме на один этаж лифт не достигает максимально возможной скорости. Так что

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{l_0}{a_0}} = \sqrt{2(t_4 - t_2)(2t_2 - t_4)} = 2\sqrt{3} \approx 3,5 \text{ с}$$

### Задача №9-Г2. Сообщающиеся сосуды

Плотность  $\rho_2$  находим из условия равенства давлений жидкости у дна в левом и правом сосудах:

$$\rho_2 g h + \rho_1 g \left(\frac{3}{2}H - h\right) = \rho_1 g H$$

$$\rho_2 = \rho_1 \left(1 - \frac{H}{2h}\right)$$

Уровни жидкости в двух половинках сосуда сравниваются и станут равны  $\frac{5H}{4}$ , т.е. в левом сосуде уровень опустится на  $\frac{H}{4}$ , а в правом поднимется на  $\frac{H}{4}$ . Следует, также, иметь в виду, что согласно условию  $h$  всегда больше  $\frac{H}{2}$  ( $h > \frac{H}{2}$ ).

В зависимости от величины  $h$  в задаче возможны 2 случая.

1.  $h < H$ , нижняя граница второй жидкости не опустится до уровня трубочки. В этом случае масса поршня находится из условия равенства давлений у дна сосуда:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 g h + \rho_1 g \left(\frac{5H}{4} - h\right) = \rho_1 g \frac{5H}{4}$$

Откуда

$$m = (\rho_1 - \rho_2)hS = \rho_1 \frac{H}{2}S$$

$$m = \rho_1 \frac{H}{2}S$$

2. В случае  $\frac{5H}{4} > h > H$  нижний уровень жидкости с плотностью  $\rho_2$  в процессе опускания поршня дойдет до трубочки, жидкость начнет перетекать в правый сосуд и будет в нем всплывать вверх, так как  $\rho_2 < \rho_1$ . Теперь, если считать от дна, жидкость с плотностью  $\rho_1$  в левом сосуде доходит до уровня  $\frac{H}{4}$ , а столб жидкости с плотностью  $\rho_2$  имеет высоту  $H$ . Из условия сохранения объемов следует, что столб жидкости с  $\rho_1$  в правом сосуде теперь имеет высоту  $(\frac{9H}{4} - h)$ , а высота столба жидкости с плотностью  $\rho_2$  равна  $(h - H)$ .

Отсюда получаем

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 g H + \rho_1 g \frac{H}{4} = \rho_1 g \left(\frac{9H}{4} - h\right) + \rho_2 g (h - H)$$

или

$$m = \rho_1 (2H - h)S + \rho_2 (h - 2H)S = \rho_1 \frac{H(2H - h)}{2h}S$$

### Задача №9-Т3. Эквилибр

Отметим, что нить не натянута до помещения льда в сосуд. Это означает, что центр масс системы «рычаг + сосуд» находится по горизонтали на уровне опоры, что позволяет в уравнениях моментов исключать соответствующие слагаемые. График имеет 4 участка. На первом, очевидно, лед нагревается. На втором - идет плавление льда, и вода начинает стекать с льдинки в сосуд, равномерно распределяясь по его дну. Однако заканчивается этот участок раньше, чем лед полностью успевает растаять – в момент отрыва льдинки от дна. То есть в конце утерянного участка оставшийся лед всплыл. Кстати, начало этого участка также не обязательно совпадает с моментом начала плавления, ведь вода может скапливаться в каких-то углублениях на льдинке и положение центра масс льда может оставаться какое-то время неизменным. Вообще, поведение на втором участке предсказать почти невозможно, поскольку процесс сильно зависит от формы куска льда, а также от того, как именно к нему будет подводиться тепло. На третьем участке – в сосуде сначала тающий лед, плавающий на поверхности воды, а потом вода, нагревающаяся до температуры кипения. На четвертом участке вода уже достигла температуры кипения и испаряется. Изменение силы натяжения нити в начале связано с перераспределением веса содержимого по мере нагрева, а в конце – с изменением массы содержимого. Массу льда можно найти по третьему отрезку графика из правила моментов ( $x$  – длина  $\frac{1}{8}$  части рычага):

$$T_3 \cdot 2x = mg \cdot 3x;$$

$T_3 = 3$  Н. Откуда  $m = 0,2$  кг.

Мощность нагрева легко посчитать по четвертому отрезку, зная массу, испарившуюся за известный промежуток времени. Хорошие точки на графике – (1600 с; 3 Н), а также (3200 с; 1,8 Н). Из них получаем  $\Delta T = 1,2$  Н,  $\Delta m = \frac{2\Delta T}{3g} = 0,08$  кг,  $\Delta \tau = 1600$  с. Откуда:

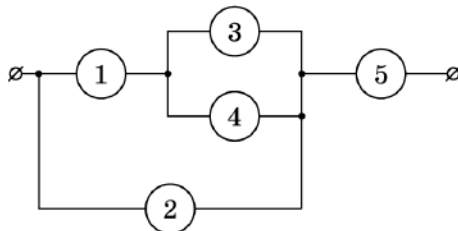
$$P = \frac{L\Delta m}{\Delta \tau} = 115 \text{ Вт.}$$

Зная мощность, не сложно посчитать начальную температуру льда:

$$t_0 = \frac{cm\Delta t_{\text{воды}} + \lambda m - P\tau_3}{c_{\text{льда}}m} \approx -81^\circ\text{C}.$$

### Задача №9-Т4. Запутанная схема

Перерисуем электрическую схему. Приборы 3 и 4 соединены параллельно, а по условию нет двух вольтметров или амперметров с одинаковыми показаниями. Поэтому один из приборов 3 и 4 должен быть вольтметром, а второй – амперметром. Давайте, для определенности, будем считать 3 амперметром, а 4 – вольтметром.



Предположим, что прибор номер 1 – амперметр. Через прибор 1 протекает ток, равный сумме токов через приборы 3 и 4. Тогда из двух амперметров 1 и 3 больший ток протекает через амперметр 1. Значит через амперметр 1 протекает ток  $I_1 = 520$  мкА, а через амперметр 3 протекает ток  $I_3 = 200$  мкА. Соответственно через вольтметр 4 протекает ток  $I_1 - I_3 = 320$  мкА. Найдём внутреннее сопротивление амперметра. Амперметр 3 включен в схему параллельно вольтметру 4, значит напряжение на амперметре 3 равно напряжению на вольтметре 4. Тогда внутреннее сопротивление амперметров  $R_A = \frac{U_4}{I_3}$ . Напряжение на амперметре 1 равно  $U_1 = I_1 R_A = \frac{U_4 I_1}{I_3}$ . Известно, что в схеме всего 2 амперметра. Если приборы 1 и 3 – амперметры, тогда прибор 2 должен быть вольтметром. Он показывает сумму напряжений на амперметрах 1 и 3, равную  $U_1 + U_4 = \frac{U_4(I_1 + I_3)}{I_3} = 3,6U_4$ . Но, по условию задачи, в схеме нет двух вольтметров, показания которых различаются в 3,6 раза. Тогда мы приходим к противоречию с предположением, что прибор 1 – амперметр. Следовательно, прибор 1 – вольтметр. Через вольтметр 1 течет ток, равный сумме токов через амперметр 3 и вольтметр 4. Поэтому напряжение на вольтметре 1 больше, чем на вольтметре 4. Если 2 – вольтметр, то напряжение на нем равно сумме напряжений на 1 и 4. Если 5 – вольтметр, то ток через него равен сумме токов через 1 и 2, значит напряжение на 5 больше, чем напряжение на 1 и 4. В любом случае получаем, что самое маленькое напряжение из всех вольтметров (равное 2 В) показывает вольтметр 4, а вольтметр 1 показывает среднее значение  $U_1 = 12$  В. Напряжение на приборе 2 равно сумме напряжений на вольтметрах 1 и 4. Тогда  $U_2 = U_1 + U_4 = 14$  В. Если предположить, что прибор 2 – амперметр, то сила тока через него должна быть равна  $\frac{U_2}{R_A} = \frac{U_2 I_3}{U_4} = 7I_3$ . Но это не соответствует условиям задачи, по условию показания двух амперметров отличаются в  $\frac{520}{200} = 2,6$  раза. Следовательно прибор 2 – вольтметр и его показания  $U_2 = 14$  В, а прибор 5 – амперметр. Мы узнали на каких местах в схеме стоят амперметры и вольтметры.

Приборы 1, 2 и 4 – вольтметры, 3 и 5 – амперметры.

Теперь найдем внутренние сопротивления приборов. Сила тока через амперметр 5 равна сумме токов через амперметр 3, вольтметр 4 и вольтметр 2. Следовательно, сила тока в амперметре 3 меньше, чем в амперметре 5,  $I_3 = 200$  мкА,

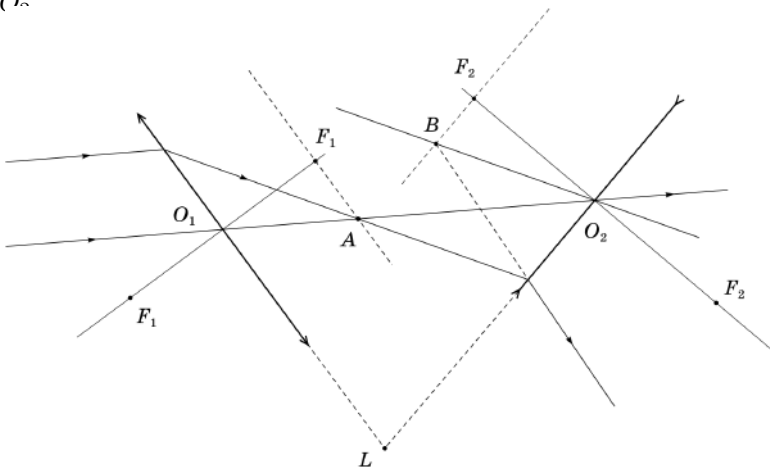
$I_5 = 520$  мА. Тогда сопротивление амперметров  $R_A = \frac{U_4}{I_3} = 10$  кОм. Сила тока через вольтметр 1 равна сумме токов через амперметр 3 и вольтметр 4.  $I_1 = \frac{U_1}{R_V} = I_3 + \frac{U_4}{R_V}$ . Преобразуем это выражение  $\frac{U_1 - U_4}{R_V} = I_3$  и выразим из него сопротивление вольтметров  $R_V = \frac{U_1 - U_4}{I_3} = 50$  кОм.

### Задача №9-Т5. Архив Снеллиуса

Проведем две прямые, проходящие через точку  $L$  и точки преломления верхнего луча. Таким образом восстановим положения линз.

Поскольку нижний луч не преломляется, он должен проходить через оптические центры обеих линз ( $O_1$  и  $O_2$  на рисунке), следовательно левая линза является собирающей, а правая – рассеивающей.

Параллельные лучи после прохождения через собирающую линзу сходятся в фокальной плоскости (точка  $A$ ). Проведем прямую параллельную левой линзе и проходящую через точку  $A$ , затем опустим из оптического центра  $O_1$  собирающей линзы перпендикуляр на фокальную плоскость. Таким образом можем найти положение заднего фокуса  $F_1$  левой линзы, для нахождения переднего фокуса  $F_1$  отложим такое же расстояние от оптического центра  $O_1$ . Для нахождения фокусов рассеивающей линзы выполним дополнительные построения – проведем через оптический центр линзы  $O_2$  прямую параллельную падающему лучу. Точка пересечения этой прямой и продолжения преломленного луча принадлежит фокальной плоскости рассеивающей линзы (точка  $B$ ). Проведем прямую параллельную правой линзе и проходящую через точку  $B$ , затем опустим из оптического центра  $O_2$  рассеивающей линзы перпендикуляр на фокальную плоскость. Таким образом можем найти положение переднего фокуса  $F_2$  правой линзы, для нахождения заднего фокуса  $F_2$  отложим такое же расстояние от оптического центра  $O_2$ .



Шифр

 $\Sigma$ **9-Т1. Лифт**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Описана стратегия движения в случае достижения максимального значения скорости $v_0$	2.0		
1.2	Описана стратегия движения в случае, когда максимальное значение скорости $v_0$ не достигалось	2.0		
1.3	Записано уравнение $t_2 = \frac{2l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$ или аналогичное	0.5		
1.4	Записано уравнение $t_3 = \frac{3l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$ или аналогичное	0.5		
1.5	Записано уравнение $t_2 = \frac{4l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$ или аналогичное	0.5		
1.6	Найдено время подъема на три этажа $t_3 = \frac{t_2+t_4}{2}$	1.0		
1.7	Численное значение времени подъема на три этажа $t_3 = 6,5$ с	0.5		
2.1	Обосновано, что при подъеме на один этаж лифт не достигает максимального значения скорости	2.0		
2.2	Записано уравнение $t_1 = 2\sqrt{\frac{l_0}{a_0}}$ или аналогичное	1.0		
2.3	Найдено время подъема на один этаж $t_1 = \sqrt{2(t_4 - t_2)(2t_2 - t_4)}$	1.5		
2.4	Численное значение времени подъема на один этаж $t_1 \approx 3,4$ с	0.5		

Шифр

 $\Sigma$ **9-Т2. Сообщающиеся сосуды**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записано равенство давлений жидкости в двух сосудах	1.0		
1.2	Получено выражение для плотности второй жидкости $\rho_2 = \rho_1(1 - \frac{H}{2h})$	2.0		
2.1	Для случая $h < H$ записаны уровни жидкостей в первом сосуде	1.0		
2.2	Для случая $h < H$ получено $m = \rho_1 \frac{H}{2} S$	2.0		
2.3	Для случая $\frac{5H}{4} > h > H$ есть понимание, что вторая жидкость перетекает через трубочку и всплывает в правом сосуде (качественное понимание, описание словами)	2.0		
2.4	Найдено, что столб жидкости с $\rho_1$ в правом сосуде теперь имеет высоту $(\frac{9H}{4} - h)$ , а высота столба жидкости с плотностью $\rho_2$ равна $(h - H)$	2 соотн по 1.0		
2.5	Для случая $\frac{5H}{4} > h > H$ получено $m = \rho_1 \frac{H(2H-h)}{2h} S$	2.0		

Шифр

 $\Sigma$ **9-Т3. Эквилибр**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Указано, что в конце второго участка льдинка всплыла	3.0		
1.2	Уравнение моментов для нахождения массы	2.0		
1.3	Найдена масса $m = 0,2$ кг	1.0		
2.1	Найдено изменение массы $\Delta m$ между двумя «хорошими» точками на 4 отрезке	1.0		
2.2	Уравнение для нахождения мощности $P$	1.0		
2.3	Численное значение $P = 115$ Вт	1.0		
3.1	Уравнение для нахождения начальной температуры $t_0$	2.0		
3.2	Численное значение $t_0 = -81^\circ\text{C}$	1.0		



Шифр

 $\Sigma$ 

## . Запутанная схема

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Нарисована эквивалентная схема, из которой видны параллельные и последовательные соединения, или в решении явно написано про параллельные/последовательные соединения в схеме.	2.0		
1.2	Указано, что один из приборов 3 и 4 амперметр, второй – вольтметр.	1.0		
1.3	Показано, что прибор 1 – вольтметр.	2.0		
1.4	Показано, что прибор 2 – вольтметр.	1.0		
1.5	Показано, что прибор 5 – амперметр.	1.0		
2.1	Обосновано, что напряжение $U_3 = U_4 = 2$ В.	1.0		
2.2	Обосновано, что напряжение $U_1 = 12$ В.	1.0		
2.3	Обосновано, что сила тока $I_3 = 200$ мкА.	1.0		
2.4	Найдено сопротивление амперметра $R_A = 10$ кОм.	1.0		
2.5	Найдено сопротивление вольтметра $R_V = 50$ кОм.	1.0		

Шифр

 $\Sigma$ **9-Т5. Архив Снеллиуса**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Выполнены верные построения для нахождения положения первой линзы.	0.5		
1.2	Выполнены верные построения для нахождения положения второй линзы.	0.5		
2.1	Описан правильный способ нахождения оптического центра $O_1$ .	0.5		
2.2	Описан правильный способ нахождения оптического центра $O_2$ .	0.5		
2.3	На рисунке или в тексте присутствуют указания на то, что левая линза является собирающей, а правая – рассеивающей (по 0,5 балла).	1.0		
3.1	Обосновано, что точка $A$ принадлежит фокальной плоскости собирающей линзы.	2.0		
3.2	На рисунке правильно построена фокальная плоскость собирающей линзы.	1.0		
3.3	Построен перпендикуляр из оптического центра $O_1$ и найдено положение заднего фокуса $F_1$ .	1.0		
3.4	На рисунке правильно отмечен передний фокус $F_1$ .	0.5		
3.5	Используются верные рассуждения или построения позволяющие найти положение фокальной плоскости правой линзы (нахождение точки $B$ в авторском решении).	2.0		
3.6	На рисунке правильно построена фокальная плоскость рассеивающей линзы.	1.0		
3.7	Построен перпендикуляр из оптического центра $O_2$ и найдено положение переднего фокуса $F$ .	1.0		
3.8	На рисунке правильно отмечен задний фокус $F_2$ .	0.5		