ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 7 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. Гоша нашёл в кабинете естествознания 3 гири и весы. После того как он всё взвесил, оказалось, что:

- Первая гиря в 4 раза тяжелее второй;
- Третья гиря в 3 раза тяжелее первой;
- Суммарный вес всех гирь — 340 грамм.

Определите вес первой гири. Ответ выразите в граммах.
Ответ: 80.

Решение. Все веса будем измерять в граммах. Обозначим вес второй гири за x, тогда по условию вес первой гири равен $4x$, а вес третьей гири равен $12x$. Суммарный вес всех гирь $x + 4x + 12x = 17x$ равен 340, поэтому $x = 20$, и вес первой гири равен $4x = 80$.

2. В 7«А» учится 26 детей, которые на всех уроках сидят по двое за партой. Однажды в этом классе провели самостоятельную работу, за которую каждый получил четвёрку или пятёрку.
Все ученики заявили следующее:

«*Все сидящие не за одной партой со мной получили четвёрки*.»

Оказалось, что правду сказали только те ученики, которые получили пятёрку. Сколько всего четвёрок было выставлено за эту самостоятельную работу?
Ответ: 24.

Решение. Заметим, что все 26 человек не могли получить четвёрки, так как в этом случае все они сказали бы правду, но правду должны были сказать только получившие пятёрку.
Рассмотрим любого ученика, получившего пятёрку. Он сказал правду, а значит все, кроме его соседа, точно получили четвёрки. И так как все остальные получили четвёрки, то его сосед сказал правду, а значит, тоже получил пятёрку. Тем самым, четвёрки получили 24 человека.

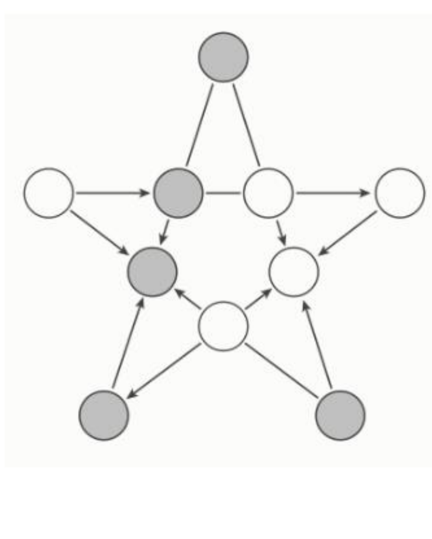
3. У сладкоежек Пети и Васи были конфеты, у каждого более 1000 конфет. Известно, что у Пети конфет было на 324 больше, чем у Васи. Каждый день они одновременно обменивались конфетами: Петя отдавал треть своих конфет Васе, а Вася отдавал треть своих конфет Пете.
У кого из них через 3 дня оказалось больше конфет?
Введите в ответе разницу:
Количество конфет у Васи - количество конфет у Пети.

Если вы считаете, что у мальчиков осталось поровну конфет, в ответ запишите 0.

Ответ: -12.

Решение. Докажем, что каждый день разность количества конфет Пети и количества конфет Васи будет уменьшаться ровно в 3 раза.
Обозначим количество конфет в некоторый день у Пети за x, а у Васи за y, их разность соответственно равна $x - y$. В этот день Петя отдаст Васе $x/3$ конфет, а Вася отдаст Пете $y/3$ конфет. Тогда у Пети конфет станет $\frac{\mathbf{2x+y}}{\mathbf{3}}$, а у Васи — $\frac{\mathbf{x+2y}}{\mathbf{3}}$ и разность равна $\frac{\mathbf{x-y}}{\mathbf{3}}$, что действительно в 3 раза меньше разности $x - y$.
Изначально разность равнялась 324, после первого дня она равнялась 108, после второго — 36, и после третьего — 12. Таким образом, через 3 дня у Пети конфет на 12 больше, чем у Васи.
Количество конфет у Васи - количество конфет у Пети= -12.

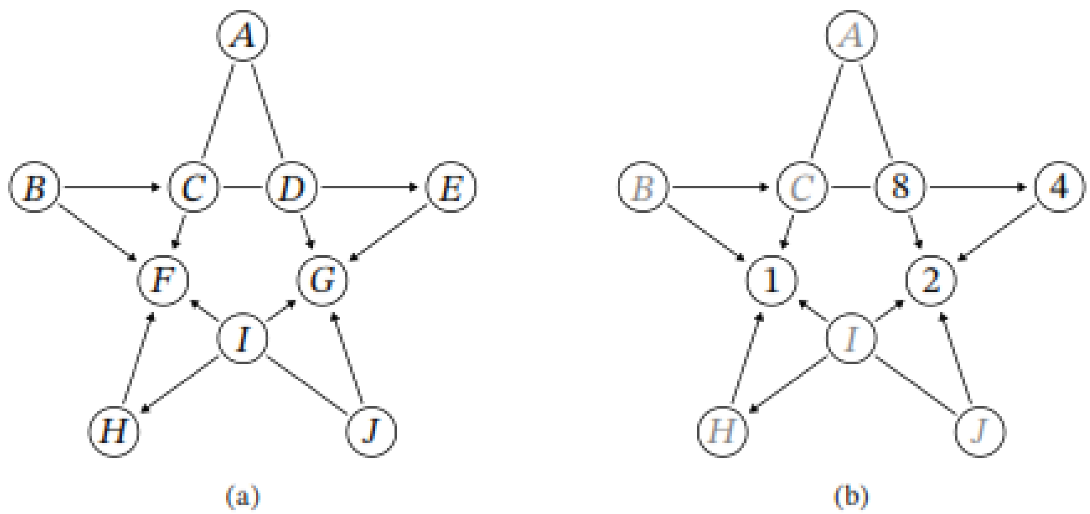
4. В 10 кружков на картинке расставили целые числа от 1 до 10, каждое по разу. Между некоторыми парами из них нарисовали стрелку или отрезок, руководствуясь следующими правилами:



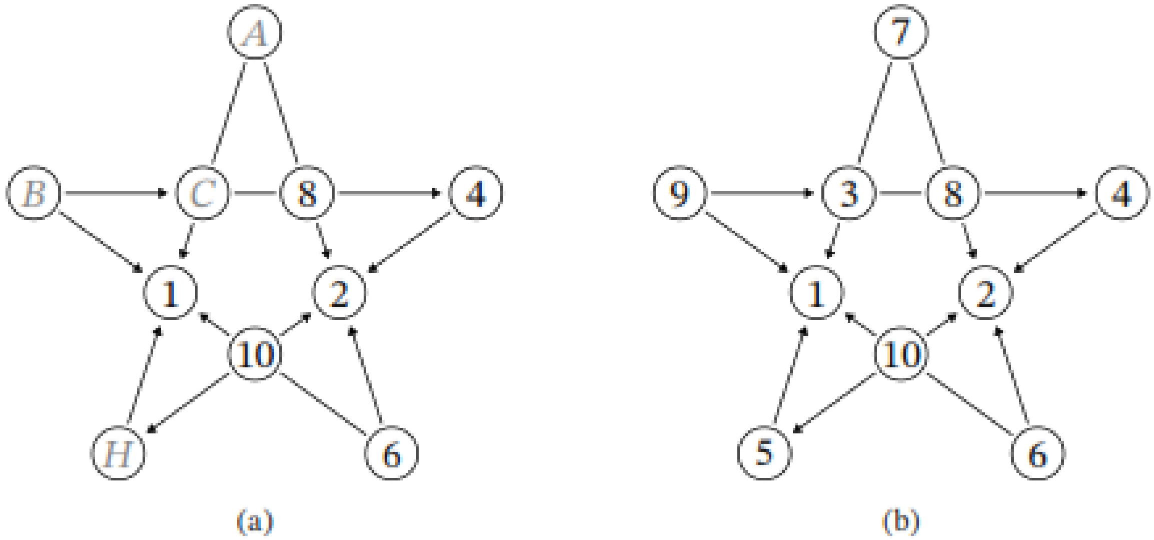
- Если одно число делится на другое, то от большего числа нарисовали стрелку к меньшему;
- Если ни одно число не делится на другое, то между ними нарисовали отрезок.

Затем все исходные числа стёрли. Восстановите, где какое число стояло.
В ответ запишите в произвольном порядке 5 чисел, которые стояли в пяти серых кружках.
Ответ: 1, 3, 5, 6, 7.

Решение. Обозначим числа, стоящие в кружках, латинскими буквами от A до J, как на
рис. 3а. Заметим, что каждому из чисел F и G кратны по четыре других числа. Среди чисел от 1 до 10 только 1 или 2 обладают таким свойством, поэтому F и G — это числа 1 и 2 в некотором порядке.



Предположим, что $F = 2$, тогда B, C, H, I — это остальные чётные числа 4, 6, 8, 10 в некотором порядке. Заметим, что B должно делиться на C, а I должно делиться на H. Но среди чисел 4, 6, 8, 10 только одна пара кратных друг другу: 8 и 4; поэтому такая ситуация невозможна, и $G = 2$, а $F = 1$. Сразу отметим, что по аналогичным соображениям в соседних с числом 2 кружках стоят числа 4, 6, 8, 10, причём $D = 8$, а $E = 4$, так как они соединены стрелкой (рис. 3b).
Теперь рассмотрим число I, оно равно 6 или 10. Предположим, что $I = 6$, тогда $J = 10$. Получаем, что 6 должно делиться на H, а из ещё не расставленных чисел под это условие подходит только число 3. Остались числа 5, 7 и 9; ни одно из них не делится на другое, но B должно делиться на C. Противоречие. Значит, данный случай невозможен; тогда $I = 10$, а $J = 6$ (рис. 4а).

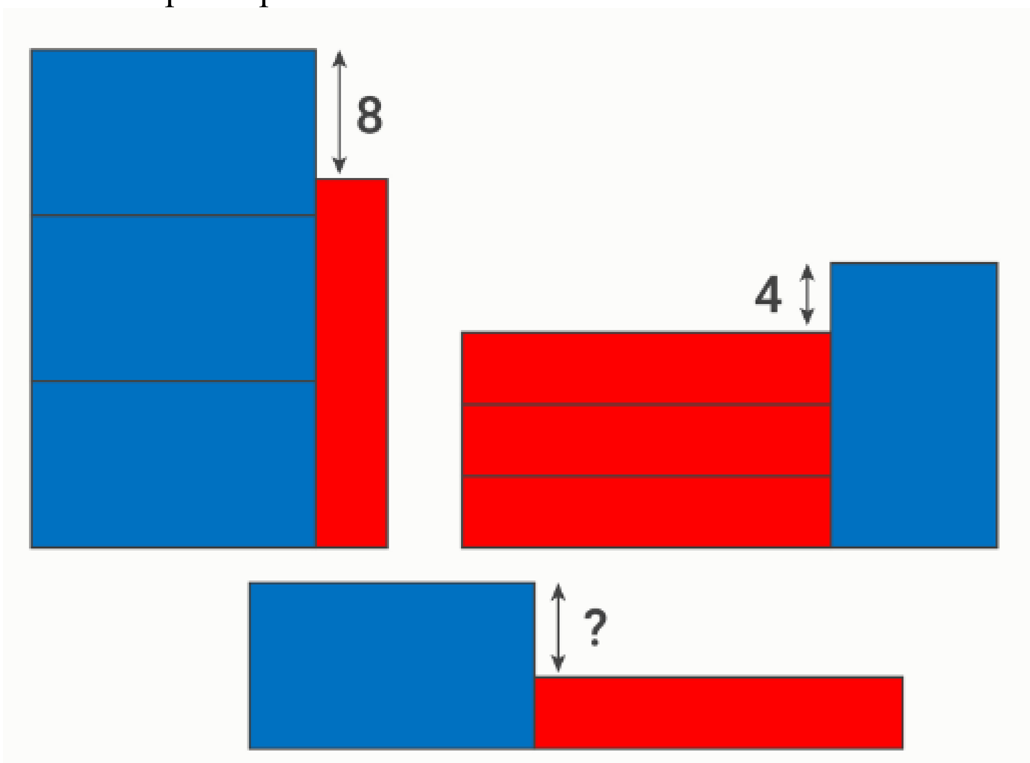


Далее заметим, что 10 должно делиться на H — из ещё не расставленных чисел под это условие подходит только число 5. Остались числа 3, 7, 9, среди них только 9 делится на 3, а значит, $B = 9$, $C = 3$ и $A = 7$.
Получаем, что существует единственная расстановка чисел от 1 до 10, удовлетворяющая условию задачи. Следовательно, числа в выделенных кружках — это 1, 3, 5, 6, 7.

5. По кругу стоят 36 натуральных чисел (не обязательно различных). Известно, что в каждой тройке подряд идущих чисел есть число, большее суммы двух других. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех 36 чисел?
Ответ: 60.

Решение. Разобьём все числа на 12 троек подряд идущих чисел. В каждой такой тройке есть число, большее суммы двух других, поэтому сумма чисел в ней не менее $1 + 1 + 3 = 5$. А тогда сумма вообще всех чисел не менее $5 \cdot 12 = 60$.
Осталось заметить, что если расставлять числа в порядке … , 1, 1, 3, 1, 1, 3, 1, 1, 3, … (всего 12 троек и 24 единицы), условие задачи будет выполняться (в любой тройке подряд идущих чисел будет одна тройка и две единицы, $3 > 1 + 1$), и сумма всех чисел будет равна 60.

6. На рисунке изображены прямоугольники с одинаковыми периметрами: синие и красные, причём одноцветные прямоугольники равны друг другу.
Два отмеченных отрезка равны 8 и 4 соответственно.



Найдите длину отрезка, обозначенного знаком «?».
Ответ: 6.

Решение. Обозначим периметры прямоугольников за $2p$, меньшую сторону синего прямоугольника за a, тогда его бóльшая сторона равна $p - a$. Также обозначим меньшую сторону красного прямоугольника за b, тогда его бóльшая сторона равна $p - b$. По условию $3a - (p - b) = 8$ и $(p - a) - 3b = 4$, а найти надо $a - b$. Сложим два имеющихся равенства и получим $3a - p + b + p - a - 3b = 2a - 2b = 12$, откуда $a - b = 6$.

7. На доске в строчку выписаны семь красных целых чисел, среднее арифметическое которых равно 18. Паша собирается записать под каждым красным числом синее целое число, отличающееся от него не более чем на 3 (возможно, равное красному). Сколько различных значений (не обязательно целых) может принимать среднее арифметическое семи синих чисел?
Ответ: 43.

Решение. Поскольку количество синих чисел равно 7, то различные значения среднего арифметического соответствуют различным значениям суммы чисел. Поймём, сколько различных значений суммы синих чисел могло получиться.

Сумма красных чисел равна $7 \cdot 18 = 126$. Поскольку синие числа отличаются от красных не более чем на 3, то сумма синих чисел не меньше $126 - 7 \cdot 3 = 105$ и не больше $126 + 7 \cdot 3 = 147$. Кроме того, поскольку синие числа целые, то и их сумма тоже целая. Значит, для неё возможно только $147 - 105 + 1 = 43$ разных значения.

Докажем, что все эти значения реализуются. Для этого возьмём набор синих чисел, в котором все синие числа на 3 меньше соответствующих красных, тогда сумма синих чисел равна 105. Далее на каждом шаге будем увеличивать на 1 какое-то синее число, которое ещё можно увеличить (например, самое левое синее из возможных). Такой процесс остановится тогда, когда каждое синее число будет на 3 больше соответствующего красного, т.е. когда сумма синих чисел станет равна 147. Так как на каждом шаге сумма синих чисел увеличивалась на 1, то она принимала все 43 значения, от 105 до 147 включительно.

Замечание. На самом деле среднее арифметическое красных чисел не влияет на ответ.

8. У Коли есть 100 монет и доска $m \times n$, где $m \geq n$ и $m > 1$. Он разложил все монеты в клетки доски так, что в любых двух соседних по стороне клетках суммарно оказалось ровно 10 монет (в каких-то клетках могло оказаться несколько монет, а какие-то клетки могли оказаться пустыми). Какие значения может принимать m? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 5, 7, 10, 19, 20, 21.

Решение. Предположим, что какое-то из чисел m и n чётно. Тогда всю доску можно разбить на прямоугольники 1×2. Из условия следует, что в каждом таком прямоугольнике должно оказаться 10 монет. Значит, таких прямоугольников должно быть $100 : 10 = 10$, а всего клеток в доске должно быть $10 \cdot 2 = 20$. В этом случае есть 3 подходящих варианта для размеров доски: 20×1, 10×2 и 5×4, поэтому m может быть равно 20, 10 или 5.

Теперь рассмотрим случай, когда оба числа m и n нечётны. В этом случае можно разбить на прямоугольники 1×2 всю доску, кроме одной угловой клетки. Поскольку в каждом прямоугольнике должно быть 10 монет, а всего монет 100, то количество монет в оставшейся клетке должно делиться на 10. При этом это количество не превышает 10, так как иначе в паре этой клетки с любой из соседних получится в сумме больше 10 монет. Остаются два случая: либо в прямоугольниках разбиения суммарно находится 90 монет (т.е. прямоугольников 1×2 ровно 9), а в оставшейся клетке 10, либо в прямоугольниках находится суммарно 100 монет (т.е. прямоугольников 1×2 ровно 10), а в оставшейся клетке 0.

В первом случае в доске 19 клеток, и это возможно только в случае доски 19×1, поэтому в этом случае $m = 19$.

Во втором случае в доске 21 клетка, и это бывает в случаях 21×1 и 7×3. Поэтому подходящие варианты для m — это 21 и 7.

Также отметим, что все вышеописанные варианты для m реализуемы. Для этого соответствующие доски покрасим в шахматную раскраску. Для случаев 21×1 и 7×3 рассмотрим шахматную раскраску, где углы доски белые, а для случая 19×1 рассмотрим раскраску, где углы чёрные. Для случаев 20×1, 10×2 и 5×4 можно рассмотреть любую из двух возможных раскрасок. Во всех этих шахматных раскрасках ровно 10 чёрных клеток. В каждую из них положим по 10 монет, а в каждую из белых клеток положим по 0 монет. Ясно, что все условия задачи выполняются.