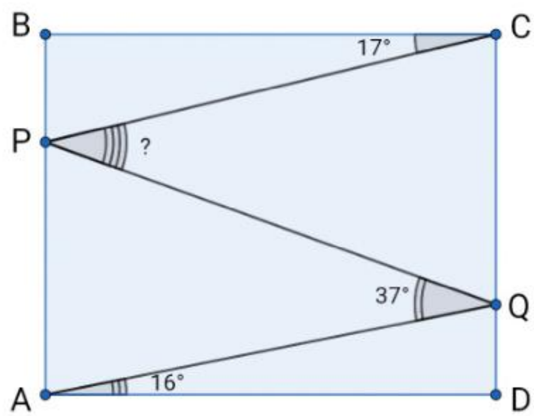
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 8 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. В понедельник у Семёна был день рождения, ему подарили некоторое количество рублей. Он решил не тратить все деньги сразу. Со вторника по субботу он тратил каждый день по 20 % от текущей суммы. Сколько рублей он потратил в четверг, если в пятницу его траты составили 384 рубля?
Ответ: 480.

Решение. Обозначим через x количество рублей, которое потратил Семён в четверг. От имеющейся суммы он тратил 20% и оставлял на следующий день 80%, поэтому на пятницу у него осталось $4x$ рублей. В пятницу он рублей потратил 20% от $4x$, то есть $\frac{4}{5}x$, что составляет 384 рублей. Тем самым получаем, что в четверг Семён потратил x = $x = \frac{5}{4} \cdot 384 = 480$ рублей.

2. На стороне *AB* прямоугольника *ABCD* выбрана точка *P*, а на стороне *CD* — точка *Q*. Известно, что $\angle\ BCP = 17°$, $\angle\ AQP = 37°$, $\angle\ QAD = 16°$.
Сколько градусов составляет $\angle\ CPQ$?



Ответ: 38.
Решение. Отметим на сторонах *CD* и *AB* точки P_1 и Q_1 соответственно так, что $PP_1 \parallel QQ_1 \parallel BC$ (рис. 5). Будем пользоваться тем, что накрест лежащие углы при параллельных прямых равны. Из параллельности прямых BC и PP_1 получаем, что

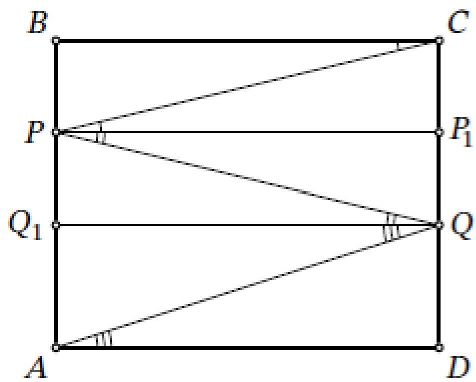
$$\angle P_1PC = \angle BCP = 17^\circ.$$

Аналогично из параллельности прямых AD и QQ_1 получаем, что

$$\angle Q_1QA = \angle DAQ = 16^\circ.$$

Тогда можно вычислить и угол PQQ_1:

$$\angle PQQ_1 = \angle PQA - \angle Q_1QA = 37^\circ - 16^\circ = 21^\circ$$



В силу параллельности прямых PP_1 и QQ_1 имеем $\angle P_1PQ = \angle PQQ_1 = 21^\circ$.
Теперь осталось лишь сложить два угла:
$\angle CPQ = \angle CPP_1 + \angle P_1PQ = 17^\circ + 21^\circ = 38^\circ$.

3. Учитель написал на доске четыре **различных** целых числа. Отличник Паша перемножил какие-то три из них и получил 37, а отличник Ваня перемножил какие-то три из них и получил 74. Какое наименьшее значение может принимать сумма четырёх чисел на доске?
Ответ: –111.

Решение. Заметим, что число 37 является простым, и получить его произведением трёх целых чисел можно лишь, перемножая числа 1, -1 и -37. Чтобы получить произведение 74, надо выбрать два множителя из набора $\{1, -1, -37\}$ и один новый множитель. Тогда получается, что есть 3 варианта для последнего множителя:

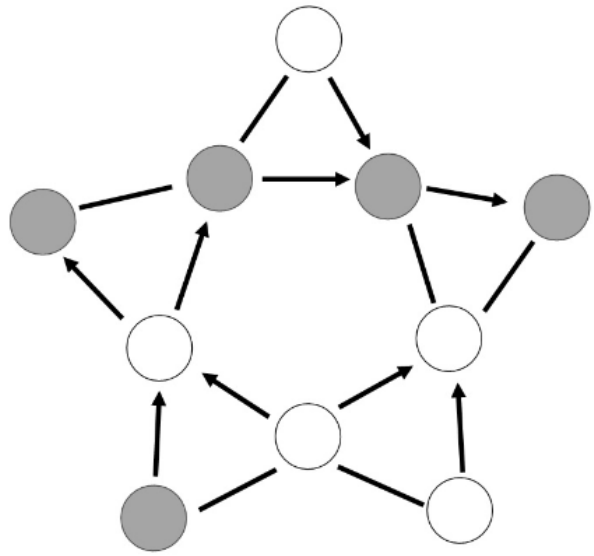
1) $1 \cdot (-1) \cdot (-74) = 74$,

2) $1 \cdot (-37) \cdot (-2) = 74$,

3) $(-1) \cdot (-37) \cdot 2 = 74$.

Очевидно, что наименьшая сумма всех четырёх чисел будет в случае, когда четвёртое число на доске равно -74, и она равна $1 + (-1) + (-37) + (-74) = -111$.

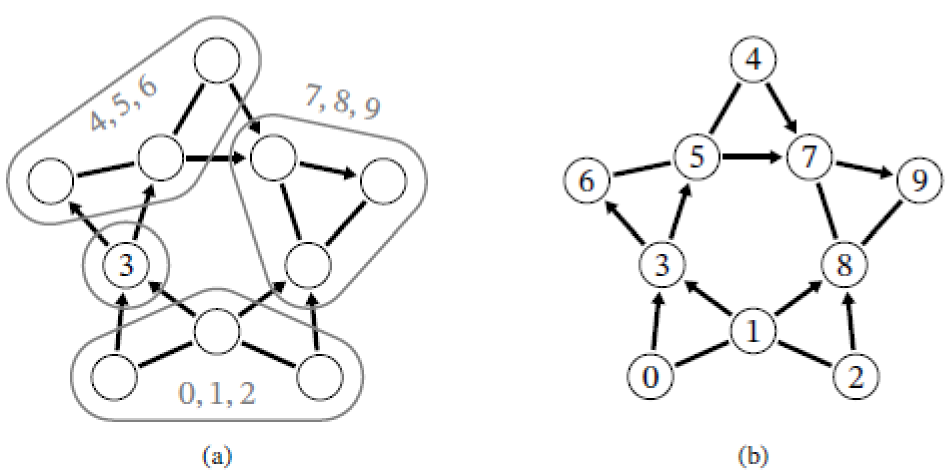
4. В 10 кружков на картинке расставили целые числа от 0 до 9, каждое по разу.



Между некоторыми парами из них нарисовали стрелку или отрезок, руководствуясь следующими правилами:

- Если числа отличаются хотя бы на 2, то от меньшего числа нарисовали стрелку к большему;
- Если числа отличаются на 1, то между ними нарисовали отрезок.

Затем все исходные числа стёрли. Восстановите, где какое число стояло.
В ответ запишите в произвольном порядке 5 чисел, которые стояли в пяти серых кружках.
Ответ: 0, 5, 6, 7, 9.



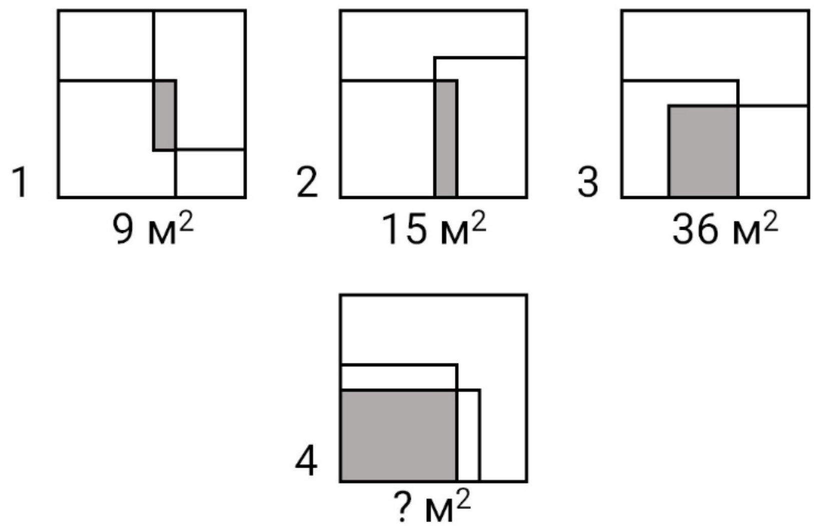
Решение. Объединим кружки, соединённые отрезками, в группы: в каждой такой группе записаны последовательные числа (рис. 6а). Мы получаем три группы по 3 кружка и один отдельный кружок. Стрелочки между группами позволяют

однозначно понять, как числа от 0 до 9 распределяются между ними: получаются группы $\{0, 1, 2\}$, $\{3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9\}$.
Чтобы завершить определение расстановки чисел, нужно воспользоваться тем, что числа, соединенные стрелками, не могут отличаться на 1. В частности, числа 2 и 4 не могут соседствовать с числом 3, что однозначно задает расстановку в группах $\{0, 1, 2\}$ и $\{4, 5, 6\}$; а внутри группы $\{7, 8, 9\}$ стрелка может быть проведена только от 7 к 9, что определяет расстановку и там (рис. 6b).

5. В течение нескольких дней Дима ходил в кафе и каждый раз выбирал там себе комбо-обед. При заказе комбо-обеда нужно выбрать один из нескольких супов, один из нескольких салатов и одно из 13 горячих блюд. За все дни каждый из возможных комбо-обедов Дима либо заказывал 1 раз, либо не заказывал вовсе.
Известно, что один вид горячего он заказывал ровно 1 раз, второй вид — ровно 2 раза, ..., тринадцатый вид — ровно 13 раз, а каждую возможную комбинацию «суп +салат» он попробовал ровно 1 раз. Известно, что салатов больше, чем супов.
Сколько супов предлагается на выбор при заказе комбо-обеда?
Сколько салатов предлагается на выбор при заказе комбо-обеда?

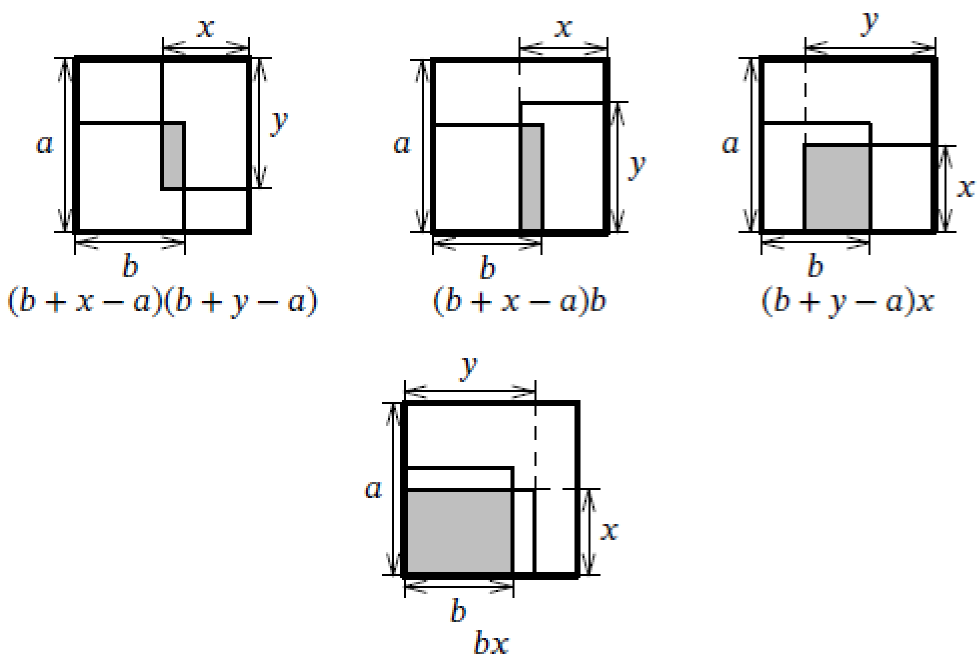
Ответ: 7 супов, 13 салатов.
Решение. По количеству заказанных горячих блюд получаем, что Дима ходил в кафе ровно $1+2+...+12+13=\frac{13\cdot 14}{2}=7\cdot 13=91$ раз. Обозначим количество видов супов за x, а количество видов салатов за y, по условию $1 < x < y$. Тогда всего бывает ровно xy комбинаций «суп+ салат», а с другой стороны, эта величина равна 91. Но $91 = 7 \cdot 13$ единственным способом раскладывается в произведение двух натуральных чисел, больших 1, первое из которых меньше второго. Значит, что $x = 7$ и $y = 13$.

6. В большой квадратный зал купили два ковра: прямоугольный и квадратный. Квадратный ковёр положили в угол комнаты, а прямоугольный попробовали положить несколькими способами, как показано на рисунке. Площадь комнаты, накрытая коврами в два слоя, в первых трёх случаях составляла 9 м^2, 15 м^2 и 36 м^2 соответственно.



Чему равна площадь комнаты, накрытая коврами в два слоя, в четвёртом случае? Ответ выразите в квадратных метрах.

Ответ: 60.



Решение. Обозначим сторону зала за a, сторону квадратного ковра за b, меньшую сторону прямоугольного ковра за x, а большую за y. Тогда площади закрашенных частей будут равны $(b + x - a)(b + y - a)$, $(b + x - a)b$, $(b + y - a)x$ и bx (рис.)

Получаем, что искомая площадь равна произведению площадей во втором и третьем случаях, делённому на площадь в первом случае, то есть $15 \cdot 36/9 = 60$.

Замечание. Эту зависимость можно было заметить и без ввода переменных, поняв, что 4 длины сторон у пересечений во втором и третьем случаях, и 4 длины сторон у пересечений в первом и четвёртом случаях, — это одни и те же 4 величины.

7. На острове живут лжецы, которые всегда лгут, и хитрецы, которые могут говорить что угодно. Однажды 30 жителей острова собрались на заседание. Все они по очереди сделали заявления:

- 1-й человек: «*Среди нас менее 1 хитреца*»;
- 2-й человек: «*Среди нас менее 2 хитрецов*»;
- ...
- 15-й человек: «*Среди нас менее 15 хитрецов*»;
- 16-й человек: «*Среди нас более 1 хитреца*»;
- 17-й человек: «*Среди нас более 2 хитрецов*»;
- ...
- 30-й человек: «*Среди нас более 15 хитрецов*».

Какое наибольшее количество лжецов могло быть на этом заседании?
Ответ: 16.

8. За год каждый из восьмиклассников гимназии № 1 получил по алгебре либо 8, либо 10 оценок (все оценки — от 2 до 5). Известно, что у любых двух восьмиклассников средние баллы по алгебре за год различны. Какое наибольшее количество восьмиклассников может быть в этой гимназии?
Средний балл — это сумма всех оценок ученика, делённая на их количество.
Ответ: 49.

Решение. Для начала поймём, какие числа могут быть средним арифметическим как 8, так и 10 натуральных чисел. Обозначив соответственно сумму 8 чисел за n, а сумму 10 чисел за m, получаем равенство $\frac{n}{8} = \frac{m}{10}$. Домножив на 40, получаем $5n = 4m$. В частности, n должно делиться на 4, а значит, величина $\frac{n}{8}$ — целая или полуцелая.

Сумма 8 оценок может равняться любому натуральному числу от 16 до 40, т. е. при 8 оценках возможен максимум 25 различных средних баллов. Также сумма 10 оценок может равняться любому натуральному числу от 20 до 50, т. е. при 10 оценках возможен максимум 31 различный средний балл. Всего получаем 25 + 31 = 56 значений, но из этого количества нужно вычесть количество средних баллов, посчитанные дважды. Как говорилось ранее, это целые или полуцелые числа: 2, 2,5, 3, 3,5, 4, 4,5, 5 (ясно, что каждое из этих чисел может быть средним баллом и при 8 оценках, и при 10; также средний балл всегда не меньше 2 и не больше 5). Получаем, что наибольшее количество различных средних баллов (оно же наибольшее количество восьмиклассников в этой гимназии) равно 56 − 7 = 49.