ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. Мотоциклист Вася запланировал поездку из пункта А в пункт Б с постоянной скоростью. Первую половину пути он проехал со скоростью v_1 — на 15 % меньшей, чем хотел. Затем он увеличил скорость до v_2 и приехал в пункт Б точно в тот момент, в какой и планировал. Найдите v_2/v_1.
Ответ: 10/7.

Решение. Пусть Вася изначально планировал ехать со скоростью v в течение времени t. Тогда в текущей поездке первая половина пути составляет $0{,}5tv$, и Вася проехал её со скоростью $0{,}85v$. Значит, времени он затратил на неё

$$\frac{0{,}5v}{0{,}85v}=\frac{1}{1{,}7}t$$

Тогда времени у него осталось

$$t-\frac{1}{1{,}7}t=\frac{0{,}7}{1{,}7}t$$

Ему нужно проехать расстояние $0{,}5tv$ с постоянной скоростью, поэтому ему нужно ехать
со скоростью

$$\frac{0{,}5tv}{\frac{0{,}7}{1{,}7}t}=\frac{0{,}5\cdot 1{,}7}{0{,}7}v=\frac{0{,}85}{0{,}7}v\,.$$

Осталось лишь найти ответ:

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\frac{0{,}85}{0{,}7}v}{0{,}85v}=\frac{1}{0{,}7}=\frac{10}{7}.$$

2. В пиццерии в каждую пиццу обязательно кладут помидоры и моцареллу. При заказе пиццы надо выбрать одну или несколько начинок: ветчину, грибы, салями или курицу. Также надо выбрать размер пиццы — 25, 30, 35 или 40 сантиметров. Сколько вариантов пиццы можно заказать в пиццерии?
Пиццы считаются разными, если они имеют разные размеры или различаются хотя бы одним видом начинки.
Ответ: 60.

Решение. Сначала поймём, сколько существует вариантов положить начинку в пиццу. Каждый из 4 ингредиентов можно либо брать, либо не брать, итого получаем

$2\cdot2\cdot2\cdot2 = 16$ вариантов. Но среди них есть один, когда мы ничего не кладём. По условию задачи такой вариант нам не подходит, а все остальные подходят, а значит, всего подходящих вариантов начинки 15. Для каждого размера пиццы возможен каждый из вариантов начинки, поэтому всего вариантов пиццы $15 \cdot 4 = 60$.

3. Рассмотрим 450 чисел, состоящих из одних девяток:

$$9,\ 99,\ 999,\ \ldots,\ \underbrace{999\ldots9}_{450}.$$

Сколько единиц в десятичной записи суммы этих 450 чисел?
Ответ: 447.

Решение. Заметим, что $\underbrace{999\ldots9}_{k} = 1\underbrace{00\ldots0}_{k} - 1$. Представим все наши числа таким же образом и просуммируем. Несложно понять, что получится число

$$\underbrace{111\ldots1}_{450}0 - 450 = \underbrace{11\ldots1}_{447}0000 + (1110 - 450) = \underbrace{11\ldots1}_{447}0760,$$

в записи которого 447 единиц.

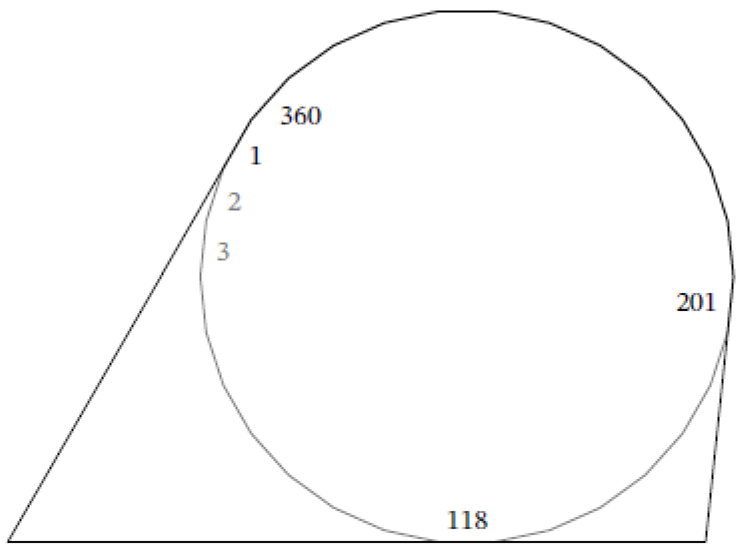
4. Петя задумал составное натуральное число N, меньшее 1000.Он выписал на доску все натуральные делители N, не равные 1. Оказалось, что два наименьших числа на доске различаются на 39.
Чему может быть равно N?
Укажите все возможные варианты.
Ответ: 82.

Решение. Предположим, что N нечётно. Тогда все делители N тоже нечётны, а значит, разность между любыми двумя чётная, и поэтому не может равняться 39. Таким образом, N точно чётно. Отсюда следует, что наименьшим числом на доске будет 2, тогда следующим по величине числом будет $2 + 39 = 41$. Поскольку N делится на два взаимно простых числа 2 и 41, то оно делится и на их произведение 82. Легко убедиться, что число $N = 82$ подходит под условие задачи.

Предположим, что существует ещё какое-то подходящее $N \neq 82$. Поскольку двумя его наименьшими делителями, отличными от 1, являются 2 и 41, то у N нет других делителей в интервале (2; 41). Тогда N должно делиться либо на какое-то простое число, большее 41, либо на степени чисел 2 или 41. При этом делиться на какую-то ещё степень 2 число N не может, т.к. среди делителей N не должно быть числа 4. Если же N делится на простое число, большее 41, или на 41^2, то N не меньше $2 \cdot 41 \cdot 41 = 3362 > 1000$. Таким образом, единственный возможный вариант для N — это 82.

5. В выпуклом n-угольнике каждый угол составляет целое число градусов. Известно, что два угла этого n-угольника равны 63° и 97°. Какое наибольшее значение может принимать n?
Ответ: 162.

Решение. Как известно, сумма всех внешних углов многоугольника равна 360°. Внешние углы к двум данным углам равны $180° - 63° = 117°$ и $180° - 97° = 83°$, и их сумма равна $117° + 83° = 200°$. Значит, сумма оставшихся внешних углов равна 160°. Поскольку все углы составляют целое число градусов, то любой внешний угол не менее 1°, а значит, оставшихся углов не более 160. Таким образом, всего углов у многоугольника не более 162.

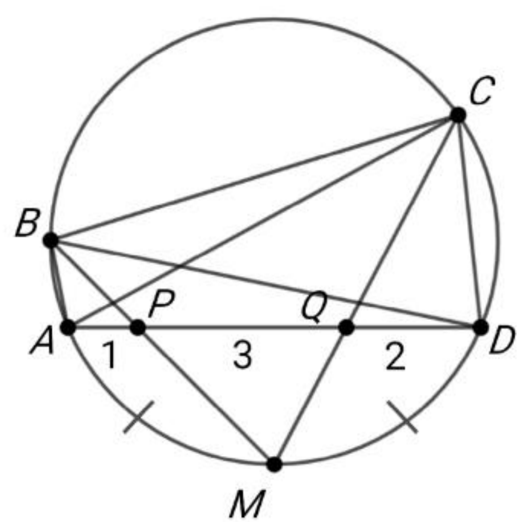


Теперь приведём пример 162-угольника, удовлетворяющего условию задачи. Рассмотрим правильный 360-угольник. Пронумеруем его прямые, на которых лежат его последовательные стороны, числами от 1 до 360.
Рассмотрим выпуклый многоугольник, стороны которого лежат на прямых с номерами 1, 118, 201, 202, …, 360 (рис.). Так как последовательные прямые повёрнуты одна относительно другой на угол 1°, то прямая 118 повернута относительно прямой 1 на 117°; эта величина составляет внешний угол, то есть внутренний будет равен 63°. Аналогично прямая 201 повернута относительно прямой 118 на 83°, то есть внутренний угол между ними составляет 97°.

6. Действительное число a таково, что уравнение $ax^2 + (a + 10)x - 10 - 2a = 0$ имеет два действительных корня, отличающихся в 3 раза. Чему может быть равно a? Укажите все возможные варианты.
Ответ: –2, –30/7.

Решение. Ясно, что $a = 0$ не подходит под условие задачи, поэтому данное уравнение является квадратным.
Заметим, что при любом a корнем уравнения будет $x_1 = 1$, т.к. при подстановке $x = 1$ получается верное равенство $a + (a + 10) - 10 - 2a = 0$. По теореме Виета произведение корней равно $\frac{-10-2a}{a}$, поэтому второй корень равен $\frac{-10-2a}{a}$.
С другой стороны, так как корни отличаются в 3 раза, то он равен либо 3, либо $\frac{1}{3}$.
В первом случае имеем $\frac{-10-2a}{a}=3$, откуда получаем $-10 - 2a = 3a$ и $a = -2$.
Во втором случае имеем $\frac{-10-2a}{a}=\frac{1}{3}$, откуда получаем $-10-2a=\frac{a}{3}$ и $a = -10/\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{30}{7}$.
Ясно, что по обратной теореме Виета эти значения a удовлетворяют условию задачи.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω. Точка M — середина дуги AD окружности Ω, не содержащей точек B и C. Отрезки BM и CM пересекают отрезок AD в точках P и Q соответственно.



Известно, что $AP : PQ : QD = 1 : 3 : 2$.
Вычислите значение выражения:

$$\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD}.$$

Ответ: 10.

Решение. Поскольку дуги AM и MD равны, то BM является биссектрисой угла ABD, а CM является биссектрисой угла ACD.
Воспользуемся свойством биссектрисы треугольника: отношение отрезков, на которые она разбивает сторону, равно отношению прилежащих к этим отрезкам сторон. Применяя это свойство для треугольника ABD и биссектрисы BP, получаем $BD : AB = DP : PA = 5 : 1 = 5$. Аналогично применяя это свойство для треугольника ACD и биссектрисы CQ, получаем $AC : CD = AQ : QD = 4 : 2 = 2$. Теперь легко найти ответ в задаче:

$$\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = \frac{AC}{CD} \cdot \frac{BD}{AB} = 2 \cdot 5 = 10.$$

8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды собралось несколько жителей острова, и каждый из них произнёс по одной фразе:

- Один сказал: «*Среди нас не более 9 рыцарей*».
- Двое сказали: «*Среди нас не более 8 рыцарей*».
- Трое сказали: «*Среди нас не более 7 рыцарей*».
- ...
- Девять человек сказали: «*Среди нас не более 1 рыцаря*».
- А все остальные сказали: «*Среди нас не более 10 рыцарей*».

Сколько человек могло сказать последнюю фразу? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 1, 5, 8, 10.

Решение. Рассмотрим случаи того, сколько всего рыцарей среди собравшихся.
Случай 1. Рыцарей хотя бы 11. В этом случае все фразы оказываются ложью. А поскольку каждый человек что-то сказал, то такой случай невозможен.

Случай 2. Рыцарей ровно 10. Тогда правду говорят только говорящие последнюю фразу (и они рыцари), а все остальные говорят неправду (и они лжецы). Значит, последнюю фразу говорят все рыцари, т. е. 10 человек.

Случай 3. Рыцарей ровно 9. Тогда правду говорит человек, сказавший первую фразу, и люди, говорящие последнюю фразу (а все остальные говорят неправду, и поэтому являются лжецами). Значит, последнюю фразу говорит $9 - 1 = 8$ человек.

Случай 4. Рыцарей ровно 8. Тогда правду говорят только люди, сказавшие первую, вторую и последнюю фразы. Значит, последнюю фразу говорит $8 - 1 - 2 = 5$ человек.

Случай 5. Рыцарей ровно 7. Тогда правду говорят только люди, сказавшие первую, вторую, третью и последнюю фразы. Значит, последнюю фразу говорит $7 - 1 - 2 - 3 = 1$ человек.

Случай 6. Рыцарей не более 6. Тогда правду говорят как минимум люди, сказавшие первую, вторую, третью и четвёртую фразы, т. е. рыцарей не менее $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ человек. Противоречие. Значит, этот случай невозможен.

Таким образом, количество людей, сказавших последнюю фразу, равно 10, 8, 5 или 1. Ясно, что все эти варианты возможны.