11 класс

Задача 11.1. (4 балла) В прямоугольном параллелепипеде V все рёбра имеют целую длину (в сантиметрах). Петя выбрал одну из вершин параллелепипеда V и посчитал площади трёх граней, содержащих эту вершину. Оказалось, что наибольшая из площадей равна 240 см^2, а наименьшая — 24 см^2. Обозначим x см^2 площадь оставшейся грани. Найдите сумму всех возможных значений x.

Ответ: 290

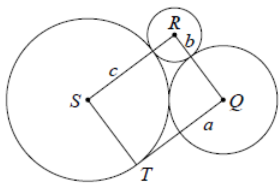
Решение. Обозначим $a \leqslant b \leqslant c$ длины рёбер параллелепипеда (в см). Тогда его грани имеют площади $ab \leqslant ac \leqslant bc$ (в см^2). Значит, $bc = 240$ и $ab = 24$. Таким образом, число b является делителем числа 24, причём ввиду неравенств $a \leqslant b \leqslant c$ мы имеем $b^2 \geqslant 24$ и $b^2 \leqslant 240$, откуда $b > 4$ и $b < 21$. Выпишем подходящие под эти неравенства делители: 6, 8, 12. Прямая проверка показывает, что параллелепипеды с длинами рёбер $(4, 6, 40)$, $(3, 8, 30)$ и $(2, 12, 20)$ действительно подходят под условие. Ответом на задачу является сумма $4 \cdot 40 + 3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 = 290$. □

Задача 11.2. (4 балла) Положительные действительные числа x, y удовлетворяют равенствам $y = \sqrt[3]{x}$ и $x^y = y^x$. Чему может быть равно xy? Укажите все возможные варианты в любом порядке.

Ответ: 1, 9.

Решение. Если $x = 1$, то $y = \sqrt[3]{1} = 1$. Данная пара является решением, $xy = 1$. Предположим теперь, что $x \neq 1$. Подставляя $y = \sqrt[3]{x}$, получаем уравнение $x^{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}^{x}$ или $x^{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{x}{3}}$, откуда следует $\sqrt[3]{x} = \frac{x}{3}$ (так как $x \neq 1$). Возведём это уравнение в куб, получим $x = \frac{x^3}{3^3}$, откуда $x^2 = 3^3$, т.е. $x = \sqrt{27}$. Значит, $y = \sqrt{3}$, откуда $xy = 9$. □

Задача 11.3. (4 балла) Три окружности радиусов a, b, c касаются как на рисунке, а их центры Q, R, S вместе с точкой T являются вершинами прямоугольника, причём точка T лежит на окружности с центром S. Найдите площадь прямоугольника $QRST$, если $b = 5$.



Ответ: 300

Решение. По условию четырёхугольник $SRQT$ является прямоугольником, так что $ST = RQ$. Поскольку отрезок, соединяющий центры двух окружностей, касающихся внешним образом, равен сумме радиусов, имеем $c = a + b = a + 5$.

Кроме того, угол SRQ является прямым, значит, треугольник SRQ — прямоугольный. По теореме Пифагора $SR^2+RQ^2 = SQ^2$, то есть $(b+c)^2+(a+b)^2 = (a+c)^2$. Раскрывая скобки, сокращая общие слагаемые, получаем $2b^2 + 2bc + 2ba = 2ac$. Сократим на 2 обе части и подставим $b = 5, c = a + 5$

$$25 + 5(a + 5) + 5a = a(a + 5).$$

Получилось квадратное уравнение $a^2 - 5a - 50 = 0$, корнями которого являются числа 10 и -5, но поскольку число a положительно, то $a = 10$. Отсюда $c = a + 5 = 15$, а площадь прямоугольника $QRST$ равна $(b + c)(a + b) = 20 \cdot 15 = 300$.

□

Задача 11.4. (4 балла) В классе учится три человека, увлекающихся рисованием, четыре человека, увлекающихся шахматами, и пять человек, увлекающихся танцами (каждый ученик увлекается ровно одним занятием). Учитель хочет разбить всех детей по парам так, чтобы увлечения участников любой пары были различны. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 1440

Решение. Будем называть художниками людей, увлекающихся рисованием, шахматистами - людей, увлекающихся шахматами, и танцорами - людей, увлекающихся танцами.

Заметим, что при любом распределении по парам ровно одна из пар состоит из художника и шахматиста. В самом деле, если такой пары нет, то пяти танцоров не хватит, чтобы поставить их в пары с художниками и шахматистами. Если же, напротив, таких пар хотя бы две, то найдётся пара, состоящая из двух танцоров.

Таким образом, ровно одна пара состоит из шахматиста и художника (выбрать такую пару можно $3 \cdot 4 = 12$ способами), а во всех оставшихся парах участвует ровно по одному танцору. Выбрать для каждого оставшегося шахматиста или художника своего танцора можно $5! = 120$ способами.

Значит, ответ на задачу равен $12 \cdot 120 = 1440$. □

Задача 11.5. (а) (2 балла) Назовём натуральное число m *привлекательным*, если равенство

$$\left\lfloor \frac{2024}{n} \right\rfloor = m$$

не выполняется ни для какого натурального n. Напомним, что $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x. Найдите наименьшее привлекательное число.
(б) (2 балла) Найдите количество привлекательных чисел, не превосходящих 2024.

Ответ: а) 45
б) 1936.

Решение. **а)** Заметим, что при $n \geqslant 45$ имеет место неравенство

$$\frac{2024}{n} - \frac{2024}{n+1} < 1.$$

В самом деле, домножим обе части неравенства на $n(n+1)$ и воспользуемся цепочкой неравенств $2024 < 45 \cdot 46 \leqslant n(n+1)$.

Значит, при увеличении $n \geqslant 45$ на единицу значение функции $\lfloor \frac{2024}{n} \rfloor$ либо не изменится, либо уменьшится на 1. Так как $\lfloor \frac{2024}{45} \rfloor = 44$, то любое натуральное число, не превосходящее 44, не является привлекательным. Заметим теперь, что число 45 является привлекательным. В самом деле,

$$\left\lfloor \frac{2024}{n} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{2024}{45} \right\rfloor = 44 \text{ при } n \geqslant 45 \text{ и } \left\lfloor \frac{2024}{n} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{2024}{44} \right\rfloor = 46 \text{ при } n \leqslant 44.$$

Таким образом, ответ на пункт (а) равен 45.

(б) Как мы уже выяснили в предыдущем пункте, функция из условия принимает все натуральные значения, не превосходящие 44. Так как при $n \leqslant 45$ имеет место неравенство

$$\frac{2024}{n-1} - \frac{2024}{n} > 1,$$

то при уменьшении $n \leqslant 44$ на единицу значение функции $\lfloor \frac{2024}{n} \rfloor$ строго увеличится. Значит, при натуральных значения $n \leqslant 44$ функция из условия принимает 44 различных значений. Таким образом, функция из условия принимает 88 натуральных значений, каждое из которых не превосходит 2024. Ответ на пункт (б) равен $2024 - 88 = 1936$. □

Задача 11.6. Назовём натуральное число n *увлекательным*, если в клетках квадратной таблицы $n \times n$ можно расставить числа от 1 до n^2 так, чтобы сумма чисел в клетках любого квадратика 2×2 делилась на 4.

(а) (1 балл) Приведите пример числа n, которое не является увлекательным и удовлетворяет неравенствам $40 \leqslant n \leqslant 49$.

(б) (3 балла) Найдите количество увлекательных чисел среди чисел $10, 11, \ldots, 49$.

Ответ:

а) Любое из чисел 42 и 46.
б) 30.

Решение. **(а)** Докажем, что чётное число, не делящееся на 4, не является увлекательным. Предположим обратное и рассмотрим расстановку чисел в таблице, удовлетворяющую условиям задачи. Так как число n чётно, таблицу можно разбить на $(n/2)^2$ не пересекающихся квадратиков 2×2, в каждом из которых сумма записанных чисел делится на 4. Значит, сумма всех чисел в таблице должна делиться на 4. С другой стороны, эта же сумма равна

$$1 + 2 + \ldots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

что не делится на 4 по предположению. Таким образом, чётное число, не делящееся на 4, не является увлекательным, и тем самым, в качестве ответа в пункте (а) подойдёт любое из чисел 42 или 46.

(б) Докажем, что если число **не** даёт остаток 2 при делении на 4, то оно является увлекательным. Достаточно привести пример расстановки. Вместо самих чисел будем расставлять их остатки от деления на 4.

Рассмотрим диагонали таблицы, идущие вправо-вниз. В каждой такой диагонали мы будем расставлять одинаковые диагонали (на рисунке ниже приведён пример для $n = 7$). Остатки на соседних диагоналях отличаются на 1 (по модулю 4), а на главной диагонали (то есть ведущей из левого верхнего угла в правый нижний) стоят 1.

1	2	3	0	1	2	3
0	1	2	3	0	1	2
3	0	1	2	3	0	1
2	3	0	1	2	3	0
1	2	3	0	1	2	3
0	1	2	3	0	1	2
3	0	1	2	3	0	1

Несложно видеть, что числа в любом квадратике 2×2 имеют следующий вид,

$x+1$	$x+2$
x	$x+1$

поэтому их сумма равна $4x + 4$ и делится на 4.

Осталось проверить, что каждый остаток встречается нужное число раз. Разберём случаи в зависимости от остатка, который n даёт от деления на 4.

Если n делится на 4, то не сложно видеть, что среди первых чисел в каждой строчке любой из остатков встречается одинаковое число раз. Из этого несложно заключить, что в таблице каждый остаток встречается одинаковое число раз.

Если n даёт остаток 1 от деления на 4, то есть имеет вид $4k + 1$ для целого неотрицательного k, то найдётся ровно $k+1$ строчка, начинающаяся с единицы, и по k строчек – начинающихся с других остатков. Поскольку в строчках, начинающихся с единицы, при рассматриваемых n число единиц ровно на один больше количества любого другого остатка, то во всей таблицы остатки 0, 2 и 3 встречаются одинаковое число раз, а единица – ровно на 1 раз больше. Нетрудно видеть, что это именно то, что нужно.

Наконец, если n даёт остаток 3 от деления на 4, то есть имеет вид $4k - 1$ для натурального k, то найдётся ровно $k - 1$ строчка, начинающаяся с двойки, и по k строчек – начинающихся с других остатков. Поскольку при рассматриваемых n в строке, начинающейся с двойки, число единиц ровно на один меньше количества любого другого остатка, то во всей таблице остатки 0, 2 и 3 встречаются одинаковое число раз, а единица – ровно на 1 раз больше. Нетрудно видеть, что это именно то, что нужно.

$\square$

Задача 11.7. Обозначим α положительный корень квадратного трёхчлена x^2+x-5. Многочлен $P(x)$ имеет целые неотрицательные коэффициенты, и $P(\alpha) = 49$.

(а) (1 балл) Найдите наименьший возможный свободный член многочлена P.

(б) (3 балла) Найдите наименьшую возможную сумму коэффициентов многочлена P.

Ответ: а) 4

б) 13

Решение. Поделим многочлен $P(x)$ с остатком на трёхчлен $x^2 + x - 5$

$$P(x) = Q(x)(x^2 + x - 5) + R(x). \tag{1}$$

Степень многочлена R не превосходит 1, а поскольку коэффициенты P являются целыми, то коэффициенты R также целые. Предположим, что многочлен R не постоянный, то есть имеет вид $ax+b$, где $a \neq 0$. Подставим $x = \alpha$ в равенство (1) и получим $R(\alpha) = 49$. Число α равно $(-1+\sqrt{21})/2$ и потому иррационально. Значит, с одной стороны число $a\alpha+b$ также иррационально, а с другой стороны, оно равно 49, и мы пришли к противоречию. Таким образом, $P(x)$ является постоянным многочленом, равным 49.

(а) Достаточно заметить, что если многочлен $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

то свободный член многочлена P равен $49 - 5a_0$. По условию он неотрицателен, поэтому его значение не меньше 4, и этот пример достигается при $P(x) = 9x^2 + 9x + 4$ (в этом случае $Q(x) = 9$).

(б) Предположим, что $P(x)$ имеет минимально возможную сумму коэффициентов. Представим его в виде

$$P(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Если для хотя бы один из коэффициентов b_i строго больше 4, то нетрудно видеть, что многочлен $P(x) + (x^2 + x - 5)x^i$ также подходит под условие и имеет меньшую сумму коэффициентов. Значит, все коэффициенты многочлена P не превосходят 4. Вооружившись этим наблюдением, поочерёдно найдём коэффициенты многочлена Q, двигаясь от меньших степеней к большим.

Итак, свободный член многочлена P равен $49 - 5a_0$ и не превосходит 4, значит, $b_0 = 4$ и $a_0 = 9$. Коэффициент при x многочлена P равен $a_0 - 5a_1 = 9 - 5a_1$ и не превосходит 4, значит, $b_1 = 4$ и $a_1 = 1$. Коэффициент при x^2 многочлена P равен $a_0 + a_1 - 5a_2 = 10 - 5a_2$ и не превосходит 4, значит, $b_2 = 0$ и $a_2 = 2$. Коэффициент при x^3 многочлена P равен $a_1+a_2-5a_3 = 3-5a_3$ и не превосходит 4, значит, и $b_3 = 3$ и $a_3 = 0$. Наконец, Коэффициент при x^4 многочлен P равен $a_2 + a_3 - 5a_4 = 2 - 5a_4$ и не превосходит 4, значит, $b_4 = 2$ и $a_4 = 0$. Итак, мы доказали, что если $P(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ удовлетворяют условию и имеет наименьшую сумму коэффициентов, то $b_0 = 4, b_1 = 4, b_2 = 0, b_3 = 3, b_4 = 2$. Легко видеть, что многочлен

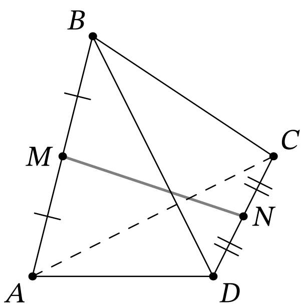
$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x + 4$$

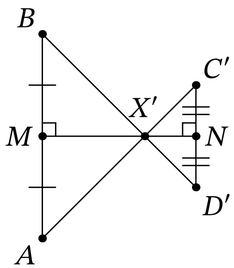
подходит под условие задачи (в этом случае $Q(x) = 2x^2 + x + 9$). Таким образом, ответом на задачу является число $2 + 3 + 4 + 4 = 13$. □

Задача 11.8. (4 балла) Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $AD = BC = 10$, $AC = BD = 11$, $AB = 9$ и $CD = 13$. Борис выбирает точку X внутри тетраэдра и считает сумму $AX + BX + CX + DX$. Какое наименьшее значение он может получить?

Ответ: 26

Решение. Отметим точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Треугольники ACD и BDC равны по трём сторонам, поэтому $AN = BN$ (это длины медиан к соответствующим сторонам в этих треугольниках). Отрезок MN является медианой в равнобедренном треугольнике ANB, поэтому $MN \perp AB$. Аналогично треугольники ADB и BCA равны по трём сторонам, поэтому $DM = CM$, и значит, $MN \perp CD$.

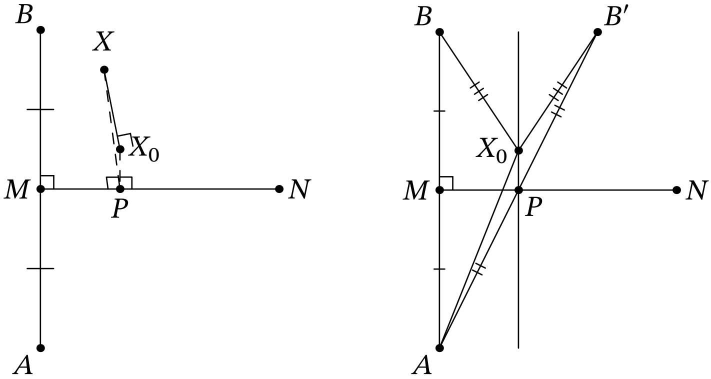




Обозначим m плоскость ABN и ℓ — прямую, образованную пересечением плоскостей m и CDN. Ясно, что $\ell \perp MN$. Отметим на прямой ℓ точки C' и D' так, что $C'D' = CD$ и точка N является серединой отрезка $C'D'$ (точки A и C' лежат по одну сторону относительно прямой MN в плоскости m). Четырёхугольник $ABC'D'$ является равнобедренной трапецией (поскольку точки A и C' симметричны относительно прямой MN точкам B и D' соответственно). Из тех же соображений симметрии отрезки BC' и AD' пересекаются на отрезке MN. Обозначим X' эту точку пересечения. Мы покажем, что точка X' — это и есть искомая точка X из условия.

Треугольники $X'NC$ и $X'NC'$ равны, так как $\angle X'NC = 90° = \angle X'NC'$, $CN = CD/2 = C'N$ и сторона $X'N$ — общая. Значит, $X'C = X'C'$. Аналогично $X'D = X'D'$. Таким образом $AX' + BX' + CX' + DX' = (AX' + D'X') + (BX' + C'X') = AD' + BC'$.

Пусть теперь X — произвольная точка в тетраэдре $ABCD$. Обозначим X_0 — основание перпендикуляра из точки X на плоскость m, а P — основание перпендикуляра из точки X на прямую MN. Тогда ясно, что $AX \geqslant AX_0$ и $BX \geqslant BX_0$, поэтому $AX + BX \geqslant AX_0 + BX_0$. Точки A, B, X_0, P лежат в одной плоскости, $AB \,||\, X_0P$ и точка P лежит на серединном перпендикуляре к AB. Обозначим B' точку, симметричную B относительно прямой X_0P. Тогда точки



A, P, B' лежат на одной прямой, так что $AP + BP = AP + B'P = AB'$. По неравенству треугольника $AX_0 + BX_0 = AX_0 + B'X_0 \geqslant AB'$. Таким образом, $AX + BX \geqslant AX_0 + BX_0 \geqslant AP + BP$. Аналогично $CX + BX \geqslant CP + DP = C'P + D'P$.

Итак, мы выяснили, что $AX + BX + CX + DX \geqslant (AP + D'P) + (BP + C'P) \geqslant AD' + BC' = AX' + BX' + CX' + DX'$. Значит, X' есть искомая точка, и осталось найти значение выражения $AX' + BX' + C'X' + D'X' = AD' + BC'$. Из соображений симметрии $AD' = BC'$. Далее, по теореме Пифагора

$$(AD')^2 = \left(\frac{AB + CD}{2}\right)^2 + NM^2 = 121 + NM^2.$$

Снова применим теорему Пифагора

$$121 + NM^2 = 121 + BN^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 121 + BN^2 - 20,25 = 100,75 + BN^2.$$

Отрезок BN является медианой треугольника BCD. По формуле, выражающей длину медианы через длины сторон треугольника, получаем

$$(AD')^2 = 100,75 + BN^2 = 100,75 + \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}BD^2 - \frac{1}{4}CD^2 = \\ = 100,75 + 50 + 60,5 - 42,25 = 169.$$

Значит, $AD' = 13$, и ответ на задачу равен $2AD' = 26$. $\square$