8 класс

Задача 8.1. (4 балла) Найдите наибольшее натуральное число n, при котором $(7!)!$ делится на $n!$.
Здесь $k!$ *означает произведение* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

Ответ: 5040.

Решение. Заметим, что $a!$ делится на $b!$ тогда и только, когда $a \geqslant b$. Значит, $5040 = 7! \geqslant n$. Таким образом, максимальное возможное значение $n = 5040$. □

Задача 8.2. (4 балла) Саша и Маша пришли в магазин. Саша купил 3 пакета молока, 7 пачек творога и 5 йогуртов. Маша купила 2 пакета молока, 10 пачек творога и 6 йогуртов. Саша потратил на всё 980 рублей, а Маша потратила 1160 рублей. Сколько суммарно стоит один пакет молока, одна пачка творога и один йогурт?

Ответ: 200.

Решение. Пусть m, t, y — цены пакета молока, пачки творога и йогурта соответственно. Тогда по условию выполнены два равенства:

$$3m + 7t + 5y = 980,$$

$$2m + 10t + 6y = 1160.$$

Из этих равенств следует, что

$$2(3m + 7t + 5y) - (2m + 10t + 6y) = 2 \cdot 980 - 1160.$$

Приведя в последнем равенстве подобные слагаемые, получим

$$4m + 4t + 4y = 800.$$

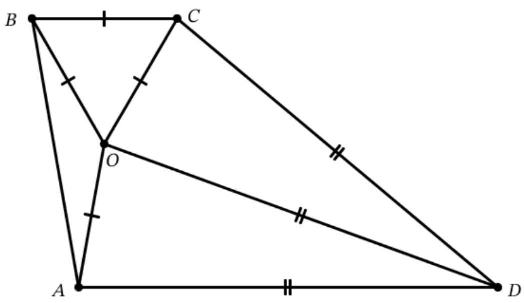
Разделив обе части равенства на 4, получим

$$m + t + y = 200.$$

Это равенство и даёт ответ на вопрос задачи. □

Задача 8.3. (4 балла) Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отметили точку O. Оказалось, что $AO = BO = CO = BC$ и $DA = DO = DC$. Сколько градусов составляет угол BAO?

Ответ: 20.



Решение. Пусть $\angle BAO = \varphi$ и $\angle DCO = \alpha$. Тогда

- $\angle ABO = \angle BAO = \varphi$, так как $\triangle ABO$ равнобедренный.
- $\angle DCO = \angle DOC = \angle DOA = \angle DAO = \alpha$, так как $\triangle DOC$ и $\triangle DOA$ равнобедренные и равны по трём сторонам.
- $\angle OBC = \angle BCO = \angle COB = 60^\circ$, так как $\triangle BCO$ равносторонний.

Выразим угол AOB:

$$\angle AOB = 360^\circ - \angle BOC - \angle COD - \angle DOA = 360^\circ - 60^\circ - \alpha - \alpha = 300^\circ - 2\alpha.$$

По сумме углов треугольника ABO получаем

$$2\varphi + 300^\circ - 2\alpha = 180^\circ.$$

Таким образом, $\alpha = 60^\circ + \varphi$. Теперь воспользуемся тем, что сумма односторонних углов при параллельных прямых AD и BC равна 180°:

$$\angle ABC + \angle BAD = 60^\circ + \varphi + \varphi + (60^\circ + \varphi) = 180^\circ.$$

Значит, $\varphi = 20^\circ$. Получаем, что $\angle BAO = \varphi = 20^\circ$. □

Задача 8.4. В компанию «Рожки и Лапки» устроилось некоторое количество тружеников и 310 лентяев. Каждый день на работу приходило по 50 человек, причём в конце рабочего дня 25 из них говорили: «Сегодня на работу пришло ровно 20 лентяев». Известно, что труженики всегда говорили правду, а лентяи всегда лгали. Через n дней оказалось, что каждый из лентяев сходил на работу ровно 1 раз.

(а) (2 балла) Найдите наибольшее возможное значение n.

(б) (2 балла) Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: а) 15
б) 7

Решение. Назовём утверждение «Сегодня на работу пришло ровно 20 лентяев» утверждением A.

Заметим, что труженик и лентяй не могли сделать утверждение A в один и тот же день, так как иначе это утверждение было бы одновременно ложью и правдой. Поэтому, возможны два варианта:

- на работу вышло 20 лентяев и 30 тружеников, и какие-то 25 тружеников из 30 сделали утверждение A;
- на работу вышло $k \geqslant 25$ лентяев и $50 - k$ тружеников, и какие-то 25 лентяев из k сделали утверждение A.

(а) Заметим, что каждый день на работу выходило хотя бы 20 лентяев. Поэтому $n < 16$ (иначе нашёлся бы лентяй, сходивший на работу более одного раза, так как $310 < 20 \cdot 16$). Покажем, что $n = 15$ возможно. Это могло быть, например, если в первые 14 дней на работу приходило по 20 лентяев, а в пятнадцатый день пришло 30 лентяев.

(б) Заметим, что каждый день на работу выходило не больше 50 лентяев. Поэтому $n > 6$ (иначе нашёлся бы лентяй, не ходивший на работу, так как $310 > 50 \cdot 6$). Покажем, что $n = 7$ возможно. Это могло быть, например, если в первые три дня на работу приходило по 50 лентяев, а в следующие четыре дня — по 40 лентяев. □

Задача 8.5. У Пети есть три палочки, длины которых равны a см, b см и c см. Известно, что числа a, b и c натуральные, различные, и $ac = b^2$. Петя смог сложить из своих палочек треугольник.
(а) (2 балла) Какой наименьший периметр мог быть у этого треугольника?

Ответ: а) 19

Решение. **(а)** Без ограничения общности можно считать, что $a < b$. Тогда из равенства $ac = b^2$ следует, что $c > b$. Если c делится на b, то $c \geqslant 2b > a + b$, что противоречит неравенству треугольника, значит c не может делиться на b. Поэтому b не может являться степенью простого числа, иначе c делится на b.

Наименьшее число, не являющееся степенью простого числа — это 6. В этом случае $ac = 36$. Единственный делитель числа 36, больший 6 и не делящийся на 6 — это 9. Тогда $a = 4$, $c = 9$, $a + b = 10 > 9$, т.е. неравенство треугольника выполнено. В этом случае получаем периметр $4 + 6 + 9 = 19$.

Следующее подходящее число для b — это 10, но при $b \geqslant 10$, $a+b+c = (a+c)+b > 2b \geqslant 20$. Значит, наименьший периметр треугольника у Пети — это 19.

□

Задача 8.6. **(б)** (2 балла) Пусть $b = 72$. Какой периметр мог быть у этого треугольника? Укажите все варианты в любом порядке.

Ответ: б) 217, 222, 228

Решение. Поскольку $b = 2^3 \cdot 3^2$, то в разложении c одна из степеней вхождения двойки или тройки меньше чем у b (чтобы c не делилось на b), а другая больше (чтобы выполнялось $c > b$). При этом понятно, что $c < 2b$, иначе $c > a + b$ и нарушается неравенство треугольника.

Пусть в c тройка входит в степени 4. Тогда $c = 81 \cdot 2^k$. Поскольку $81 \cdot 2^k < 2 \cdot 72$, $k = 0$. Значит, единственный вариант в этом случае это $a = 2^6 = 64$, $c = 3^4 = 81$, $a + b = 136 > c$. Периметр равен $64 + 72 + 81 = 217$.

Пусть в c тройка входит в степени 3. Тогда $c = 27 \cdot 2^k$. При $k \leqslant 1$ будет $c \leqslant 54 < b$, а при $k \geqslant 3$ будет $c \geqslant 216 > 2b$. Значит, единственный вариант это $c = 3^3 \cdot 2^2 = 108$, $a = 3 \cdot 2^4 = 48$, $a + b = 120 > c$. Периметр при этом равен $48 + 72 + 108 = 228$.

Пусть в c тройка входит в степени 1. Тогда $c = 3 \cdot 2^k$. При $k \leqslant 4$ будет $c < 3 \cdot 16 = 48 < b$, а при $k = 6$ будет $c = 3 \cdot 2^6 = 192 > 2b$. Значит, единственный вариант это $c = 3 \cdot 2^5 = 96$, $a = 3^3 \cdot 2 = 54$, $a + b = 126 > c$. Периметр при этом равен $54 + 72 + 96 = 222$.

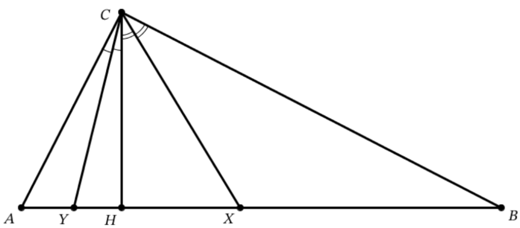
Если же в c тройка входит в степени 0, то $c \leqslant 2^6 = 64 < b$, противоречие. Во второй степени тройка в c входить не может, т.к. тогда c будет делиться на b или c будет меньше b.

Таким образом, всего возможны 3 варианта: 217, 222, 228.

□

Задача 8.7. (4 балла) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH. На гипотенузе AB отметили точки X и Y, такие что CX и CY — биссектрисы углов BCH и HCA соответственно. Найдите, чему равна длина стороны AB, если известно, что периметр треугольника ABC равен 44, а длина отрезка XY равна 6.

Ответ: 19



Решение. Пусть $\angle ACY = \angle YCH = \alpha$, $\angle HCX = \angle XCB = \beta$. Тогда $2\alpha + 2\beta = \angle ACB = 90°$, поэтому $\angle CAH = 90° - \angle ACH = 2\beta$. Заметим, что $\angle CYB$ внешний для треугольника ACY, поэтому $\angle CYB = \angle ACY + \angle CAY = \alpha + 2\beta = \angle YCB$, поэтому треугольник BCY равнобедренный и $BC = BY$. Аналогично получаем, что треугольник ACX равнобедренный и $AC = AX$.

С использованием полученных равенств можем записать:

$$44 = AB + BC + CA = AB + BY + AX = AB + AB + XY = 2AB + 6.$$

Из полученного равенства находим $AB = 19$. $\square$

Задача 8.8. (4 балла) Найдите сумму цифр числа

$$3 \cdot \underbrace{33\ldots3}_{100}{}^{3} + 2 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{100}{}^{2} + \underbrace{55\ldots5}_{100}{}^{2} + \underbrace{33\ldots3}_{100}.$$

Ответ: 300

Решение. Преобразуем наше число

$$3 \cdot \underbrace{33\ldots3}_{100}{}^{3} + 2 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{100}{}^{2} + \underbrace{55\ldots5}_{100}{}^{2} + \underbrace{33\ldots3}_{100} =$$

$$3 \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{10^{100}-1}{9}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{10^{100}-1}{9}\right)^2 + 5^2 \cdot \left(\frac{10^{100}-1}{9}\right)^2 + 3 \cdot \frac{10^{100}-1}{9} =$$

$$81\frac{(10^{100}-1)^3}{9^3} + 27\frac{(10^{100}-1)^2}{9^2} + 3\frac{(10^{100}-1)}{9} =$$

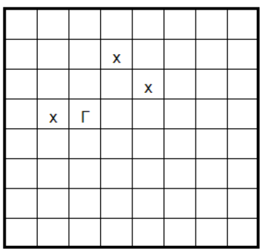
$$\frac{(10^{100}-1)}{9} \cdot \left((10^{200} - 2 \cdot 10^{100} + 1) + 3(10^{100}-1) + 3\right) =$$

$$\frac{(10^{100}-1)}{9} \cdot (10^{200} + 10^{100} + 1) = \frac{(10^{300}-1)}{9} = \underbrace{11\ldots1}_{300}.$$

Значит, сумма цифр равна 300.

$\square$

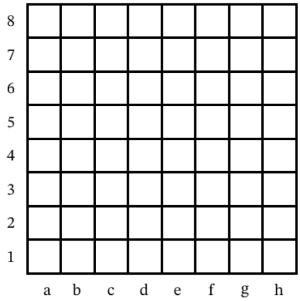
Задача 8.9. (4 балла) Новая шахматная фигура *гусь* может ходить либо на одну клетку влево, либо на две клетки вправо и одну вверх, либо на две клетки вверх и одну вправо. Возможные ходы гуся, стоящего в клетке Г, отмечены на рисунке крестиками. Гусь бьёт так же, как и ходит.



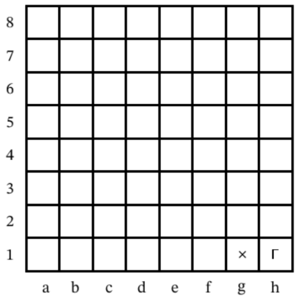
Несколько гусей стоят в клетках доски 8×8 так, что никакой гусь не бьёт другого гуся, при этом любая незанятая клетка бьётся хотя бы одним гусём. Сколько гусей может стоять на доске? Укажите все возможные варианты в любом порядке.

Ответ: 32.

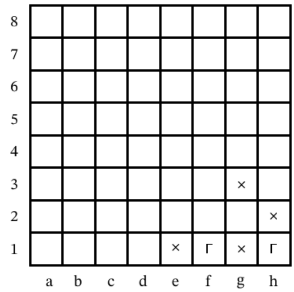
Решение. Покажем, что существует единственная расстановка гусей, удовлетворяющая условию. Введём стандартные шахматные обозначения для горизонталей и вертикалей: горизонтали нумеруются числами от 1 до 8 снизу вверх, вертикали нумеруются буквами от a до h слева направо (см. рис.)



Заметим, что любая клетка может биться только гусями, расположенными ниже этой клетки, либо правее. Рассмотрим клетку h1 (клетку в правом нижнем углу). Эта клетка не может биться никаким гусём (так как не существует клеток ниже или правее), поэтому в ней обязательно должен стоять гусь. Отметим h1 буквой Г, а также отметим крестиками все клетки, которые бьёт гусь, расположенный в h1 (это только клетка g1).

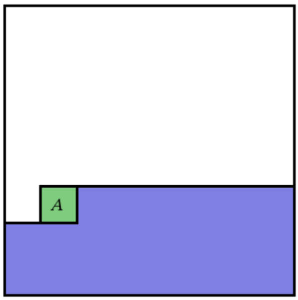


Теперь рассмотрим клетку f1. Она не может биться никаким гусём, так как ниже неё нет клеток, а правее есть только гусь h1, который не бьёт f1. Поэтому в клетке f1 обязательно должен стоять гусь. Отметим f1 буквой Г, а также отметим крестиками клетки h2, g3 и e1, которые бьёт гусь, расположенный в f1.



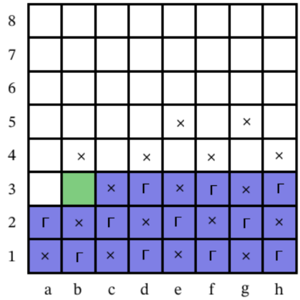
Будем дальше по одной определять клетки, в которых обязательно стоят гуси. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть мы знаем про некоторые клетки, что в них обязательно стоят гуси. Отметим все эти клетки буквами Г, а клетки, которые бьют такие гуси — крестиками. Пусть клетка A не отмечена, при этом все клетки правее A в той же строке отмечены, и все клетки в строках ниже A отмечены (синяя облисть на рисунке). Тогда в клетке A обязательно стоит гусь.



Доказательство леммы. Клетка A может биться только гусями, расположенными в синей области.Однако в этой области есть только отмеченные клетки. В клетках, отмеченных крестиками, гусей быть не может, а гуси, расположенные в остальных клетках, не бьют клетку A (так как все побитые ими клетки отмечены крестиками, а A не отмечена). Поэтому клетка A не может биться никаким гусём, а значит в ней стоит гусь. Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет последовательно отметить все клетки доски (см. рис.)



Проделав это, убеждаемся, что клетки, занятые гусями, и свободные от гусей, образуют шахматную раскраску, и что гусей на доске обязательно 32.

□