9 класс

Задача 9.1. (4 балла) Про положительные числа a и b известно, что $a^2+ab = 36$ и $b^2+ab = 64$. Найдите значение $a + b$.

Ответ: 10.

Решение. Сложим выражения из условия, получим $a^2 + 2ab + b^2 = 100$, т.е. $(a+b)^2 = 100$. Поскольку числа a и b положительные, то и $a + b$ тоже положительное. Значит, $a + b = \sqrt{100} = 10$. □

Задача 9.2. Катя написала на доске натуральное число. За один ход она может взять две подряд идущие цифры этого числа, произведение которых является двузначным числом, и заменить их на это произведение.

Например, если бы число Кати было равно 1358, то она могла бы получить за один ход из него 1158 или 1340.

Известно, что после того как Катя произвела 3 операции со своим числом, она получила число 2345.
(а) (2 балла) Какое число Катя могла написать изначально? Приведите один пример.

Ответ: 3959, 5579, 9359.

Решение. Посмотрим, какие числа могли получиться у Кати на предыдущем шаге. Какие-то две соседние цифры числа 2345 должны быть произведением двух цифр числа на предыдущем шаге. Поскольку 23 и 34 нельзя представить в виде произведения двух цифр, то это может быть либо $45 = 5 \cdot 9$, либо $45 = 9 \cdot 5$. Значит, на предыдущем шаге было либо число 2395, либо 2359.

Проделаем ещё один шаг назад. Из числа 2395 этого сделать не получится, т.к. 23, 39 и 95 нельзя представить в виде произведения двух цифр. В числе 2359 в виде произведения двух цифр можно представить только 35 как $5 \cdot 7$ или как $7 \cdot 5$. Значит, на предыдущем шаге было либо число 2759, либо 2579.

У числа 2759 подходящая пара цифр — это только 27. Значит, до него могли быть числа 9359 и 3959.

У числа 2579 подходящая пара цифр только 25, и значит до него могло быть только число 5579.

Итого получаем три варианта: 3959, 9359, 5579.

□

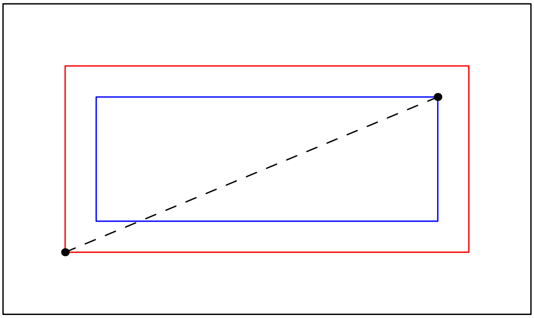
Задача 9.3. **(б)** (2 балла) Укажите в любом порядке все числа, которые могли быть у Кати изначально.

Ответ: 3959, 5579, 9359.

Решение. □

Задача 9.4. (4 балла) Петя и Вася плавают в бассейне размера 10 м × 17 м. Известно, что кратчайшее расстояние от Пети до края бассейна равно 2 метра, а кратчайшее расстояние от Васи до края — 3 метра. Какое максимальное расстояние может быть между Петей и Васей?

Ответ: 13



Решение. Посмотрим, где может находиться Петя. Поскольку кратчайшее расстояние от него до края бассейна равно 2 метра, он может находиться на границе прямоугольника размера 6 м × 13 м, находящегося ровно посередине бассейна. Аналогично с Васей, но он может находиться на границе прямоугольника размера 4 м × 11 м.

Чтобы найти наибольшее расстояние между точками этих прямоугольников, необходимо измерить расстояние между их противоположными концами, и оно будет равно

$$\sqrt{(10-2-3)^2+(17-2-3)^2}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

□

Задача 9.5. (4 балла) В футбольном турнире участвовало десять команд, каждая сыграла с каждой один раз. Команды, занявшие первое и второе место, в сумме набрали всего лишь на пять очков меньше, чем все остальные команды вместе. Сколько очков набрала команда с минимальным количество очков? За победу в футбольном турнире дают 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.

Ответ: 7

Решение. Посчитаем, какое максимальное количество очков суммарно могли набрать первые две команды. Эти команды сыграли $2 \cdot 8 = 16$ матчей с другими командами и 1 матч между собой. За каждый матч набирается не более 3 очков, поэтому суммарно первые две команды могли набрать не более $17 \cdot 3 = 51$ очка.

Теперь посчитаем, какое минимальное количество очков суммарно могли набрать последние восемь команд. Между собой они сыграли $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ матчей. В каждом матче суммарно набирается не менее 2 очков, поэтому последние 8 команд суммарно набрали не менее $28 \cdot 2 = 56$ очков.

Таким образом, ситуация из условия задачи возможна лишь в том случае, когда первые две команды суммарно набрали в точности 51 очко, а последние восемь — 56 очков. Значит, первые две команды выиграли у каждой из оставшихся, а оставшиеся команды во всех матчах между собой сыграли вничью. Тогда у всех команд с третьего по десятое место ровно по 7 очков, т.е. команда, набравшая минимальное количество очков, набрала 7 очков. $\square$

Задача 9.6. (4 балла) Простое число p таково, что числа $15p - 15$ и $16p - 15$ являются точными квадратами. Чему может быть равно p? Укажите все возможные варианты в любом порядке.

Ответ: 61.

Решение. Запишем условия в виде $15p - 15 = m^2$ и $16p - 15 = n^2$. Вычтем из второго условия первое, получим $p = n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$. Поскольку просто число p равно произведению двух натуральных чисел, то одно из этих чисел должно быть равно 1, а другое p. Отсюда $n - m = 1$ и $n + m = p$.

Получаем, что $n = m + 1$ и $2m + 1 = p$. Подставим это выражение в первое условие, получим $15 \cdot (2m + 1) - 15 = m^2$, откуда $30m = m^2$. Значит, либо $m = 0$, и тогда $p = 1$, что не является простым числом, либо $m = 30$, и тогда $p = 61$.

При $p = 61$ получаем $15p - 15 = 900 = 30^2$ и $16p - 15 = 961 = 31^2$. Значит, p может быть равно только 61. $\square$

Задача 9.7. (4 балла) Петя выписал на доску выражение $1 + 2 + \ldots + 1000$. Его младший брат Вася в каждом числе вставил между всеми соседними цифрами знак умножения. Например, число 547 превратилось в $5 \cdot 4 \cdot 7$. Чему равно значение полученного выражения?

Ответ: 93195

Решение. Заметим, что если в записи числа присутствует 0, то произведение его цифр равно 0. Значит, все такие числа дадут нулевой вклад в итоговое выражение. Таким образом, осталось лишь рассмотреть числа без нулей в записи.

Разберёмся по-отдельности с однозначными, двузначными и трёхзначными числами. Однозначных чисел всего 9 и они дают вклад $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$.

Докажем, что двузначные числа дают вклад 45^2. Действительно, рассмотрим выражение $(1 + 2 + \ldots + 9)(1 + 2 + \ldots + 9)$. После раскрытия скобок образуются все пары вида $i \cdot j$, где i и j — ненулевые цифры. Это как раз и совпадает с тем, что получится, если у всех двузначных чисел просуммировать произведение цифр.

Аналогично, для трёхзначных чисел можно рассмотреть произведение $(1+2+\ldots+9)(1+2+\ldots+9)(1+2+\ldots+9)$, значение которого будет равно вкладу всех трёхзначных чисел.

Таким образом, искомый ответ это $45+45^2+45^3=93195$.

$\square$

Задача 9.8. Лёня мечтает в будущем полететь на Марс и основать там свою страну. Пока он хочет придумать флаг этой страны. Он собирает различные варианты флага размером 8×8 из плиток 1×1 серого, бурого и малинового цветов, причём плитки каждого из цветов должны присутствовать.

(а) (1 балл) Лёня решил, что плитки каждого цвета должны образовывать прямоугольник. Кроме того, плитки серого и бурого цвета в объединении тоже должны образовывать прямоугольник, а также плитки бурого и малинового цвета в объединении должны образовывать прямоугольник. Сколько вариантов флага придётся рассмотреть Лёня?

(б) (3 балла) Лёне не понравился ни один вариант флага из пункта (а), и он решил отказаться от условий про объединения цветов. Осталось лишь требование, что клетки каждого цвета должны образовывать прямоугольник. Сколько **новых** вариантов флага придётся рассмотреть Лёне?

Ответ:

а) 84
б) 1344.

Решение. Поскольку цветов всего 3, то какие-то две из угловых плиток квадрата 8×8 будут покрашены в одинаковые цвета. Поскольку плитки этого цвета образуют прямоугольник, то одна из его сторон совпадает со стороной квадрата 8×8. Значит, противоположная ей сторона должна быть параллельна этой стороне квадрата, и равна 8. Это означает, что весь квадрат 8×8 разбивается на два прямоугольника: с плитками этого цвета, и с плитками двух других цветов.

Теперь если рассмотреть оставшийся прямоугольник, то с ним можно проделать аналогичное рассуждение. Тогда получается, что разделение на цвета происходит следующим образом. Сначала проводится один разрез по линиям сетки, и одна из полученных частей целиком становится какого-то цвета. Далее вторая часть разрезается на две части второго и третьего цвета.

(а) Можно понять, что в этом пункте во-первых, второй разрез должен быть параллелен первому, а во-вторых, посередине всегда должен быть бурый цвет. Посчитаем количество способов это сделать. Нужно выбрать одно из двух направлений разрезов (горизонтальное или вертикальное), затем выбрать два места из семи возможных, а потом ещё один из двух порядков цветов (серый бурый малиновый или малиновый бурый серый). Получаем всего $2\cdot C_7^2\cdot2=2\cdot\frac{7\cdot6}{2}\cdot2=84$ варианта.

(б) В этом пункте разрезы могут быть либо параллельны, либо перпендикулярны. Если разрезы параллельны, то получаем почти то же самое, что и в прошлом пункте, но для других 4 порядков цветов (серый малиновый бурый, малиновый серый бурый, бурый малиновый серый, бурый серый малиновый). Значит, тут вариантов $2 \cdot C_7^2 \cdot 4 = 2 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 4 = 168$.

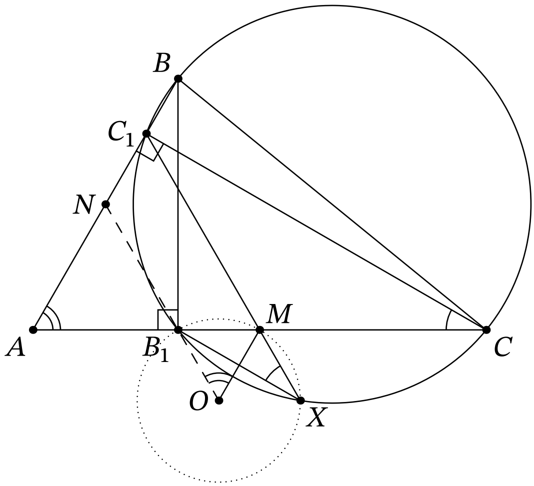
Если разрезы перпендикулярны, то у нас есть 4 варианта, какой цвет занимает 2 угла; $7 \cdot 7$ вариантов выбрать место для горизонтального и вертикального разреза; 6 вариантов порядка цветов. Итого получаем $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 1176$ вариантов.

Суммируя, получаем $1176 + 168 = 1344$ варианта.

$\square$

Задача 9.9. (4 балла) В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BB_1 и CC_1. Точки M и N являются серединами сторон AC и AB соответственно. Прямая C_1M повторно пересекает описанную окружность треугольника BCC_1 в точке X. Точка O является центром описанной окружности треугольника B_1MX. Найдите ON, если $AB = 10$, $B_1M = 3$, $\angle A = 60°$.

Ответ: 8.



Решение. Докажем в первую очередь, что точки N, B_1 и O лежат на одной прямой.

Сначала заметим, что поскольку треугольник ABB_1 прямоугольный, $\angle BAB_1 = 60°$, а N — середина гипотенузы AB, то треугольник ANB_1 является равносторонним, откуда следует что $NB_1 = \frac{AB}{2} = 5$ и $\angle AB_1N = 60°$.

Отметим, что $\angle ACC_1 = 90° - 60° = 30°$. Углы $\angle B_1MX$ и $\angle B_1CC_1$ равны, поскольку являются вписанными в одну окружность, а $\angle B_1OM = 2\angle B_1XM = 2 \cdot 30° = 60°$. Поскольку O является центром описанной окружности треугольник B_1MX, то $OB_1 = OM$, что приводит к тому, что треугольник OB_1M – равносторонний. Таким образом, $\angle OB_1M = 60°$ и $OB_1 = OM = 3$.

Получаем, что точки N, B_1 и O лежат на одной прямой и $NO = NB_1 + B_1O = 5 + 3 = 8$. $\square$