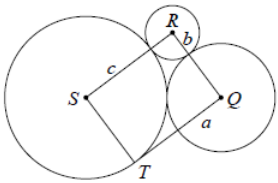
11 класс

Задача 11.1. (4 балла) В прямоугольном параллелепипеде V все рёбра имеют целую длину (в сантиметрах). Петя выбрал одну из вершин параллелепипеда V и посчитал площади трёх граней, содержащих эту вершину. Оказалось, что наибольшая из площадей равна $240\,\text{см}^2$, а наименьшая — $24\,\text{см}^2$. Обозначим $x\,\text{см}^2$ площадь оставшейся грани. Найдите сумму всех возможных значений x.

Задача 11.2. (4 балла) Положительные действительные числа x, y удовлетворяют равенствам $y = \sqrt[3]{x}$ и $x^y = y^x$. Чему может быть равно xy?Укажите все возможные варианты в любом порядке.

Задача 11.3. (4 балла) Три окружности радиусов a, b, c касаются как на рисунке, а их центры Q, R, S вместе с точкой T являются вершинами прямоугольника, причём точка T лежит на окружности с центром S. Найдите площадь прямоугольника $QRST$, если $b = 5$.



Задача 11.4. (4 балла) В классе учится три человека, увлекающихся рисованием, четыре человека, увлекающихся шахматами, и пять человек, увлекающихся танцами (каждый ученик увлекается ровно одним занятием). Учитель хочет разбить всех детей по парам так, чтобы увлечения участников любой пары были различны. Сколькими способами он может это сделать?

Задача 11.5. **(а)** (2 балла) Назовём натуральное число m *привлекательным*, если равенство

$$\lfloor \frac{2024}{n} \rfloor = m$$

не выполняется ни для какого натурального n. Напомним, что $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x. Найдите наименьшее привлекательное число.

(б) (2 балла) Найдите количество привлекательных чисел, не превосходящих 2024.

Задача 11.6. Назовём натуральное число n *увлекательным*, если в клетках квадратной таблицы $n \times n$ можно расставить числа от 1 до n^2 так, чтобы сумма чисел в клетках любого квадратика 2×2 делилась на 4.

(а) (1 балл) Приведите пример числа n, которое не является увлекательным и удовлетворяет неравенствам $40 \leqslant n \leqslant 49$.

(б) (3 балла) Найдите количество увлекательных чисел среди чисел $10, 11, \ldots, 49$.

Задача 11.7. Обозначим α положительный корень квадратного трёхчлена $x^2 + x - 5$. Многочлен $P(x)$ имеет целые неотрицательные коэффициенты, и $P(\alpha) = 49$.

(а) (1 балл) Найдите наименьший возможный свободный член многочлена P.

(б) (3 балла) Найдите наименьшую возможную сумму коэффициентов многочлена P.

Задача 11.8. (4 балла) Дан тетраэдр $ABCD$. Известно, что $AD = BC = 10$, $AC = BD = 11$, $AB = 9$ и $CD = 13$. Борис выбирает точку X внутри тетраэдра и считает сумму $AX + BX + CX + DX$. Какое наименьшее значение он может получить?