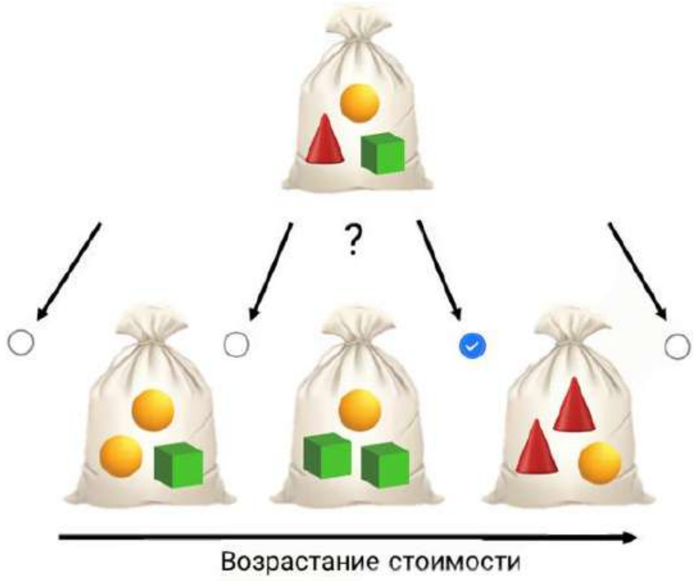
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2024 г.
ПРИГЛАСИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. 4 КЛАСС

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1

В волшебной лавке продаются волшебные кубики, шары и конусы.
Все фигурки одного типа стоят одинаково, а разные — возможно, по-разному. Волшебник собрал несколько наборов и расположил их на витрине в порядке возрастания стоимости. Потом он собрал ещё один набор. Куда его следует положить на витрине, чтобы все наборы по-прежнему лежали по возрастанию стоимости?



Ответ:

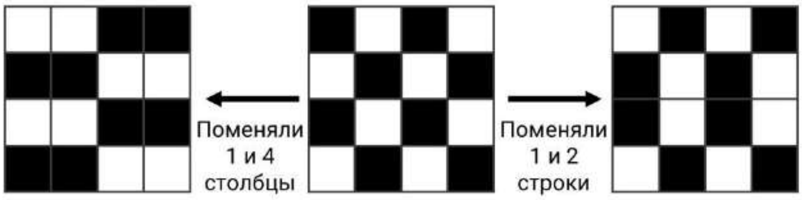
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

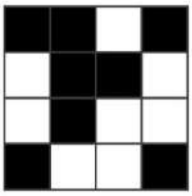
Заметим, что в первых двух мешках совпадают шарик и кубик, а третья фигура другая. Значит, кубик дороже шарика. Второй и третий мешки содержат шарик и две одинаковые фигуры. Значит, конус дороже кубика. Новый мешок можно получить, заменив во втором мешке кубик на конус. Значит, он дороже второго мешка. Аналогично, новый мешок можно получить, заменив в третьем мешке конус на кубик, получится более дешевый набор. Таким образом, новый набор дороже второго и дешевле третьего.

Задание № 2

Петя играет в игру: на экране есть клетчатый квадрат размером 4 × 4. Каждая клетка окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет. За один ход можно поменять местами либо два столбца, либо две строки. Например, из раскрашенного в шахматном порядке квадрата можно за один ход получить такие квадраты, как на рисунке:

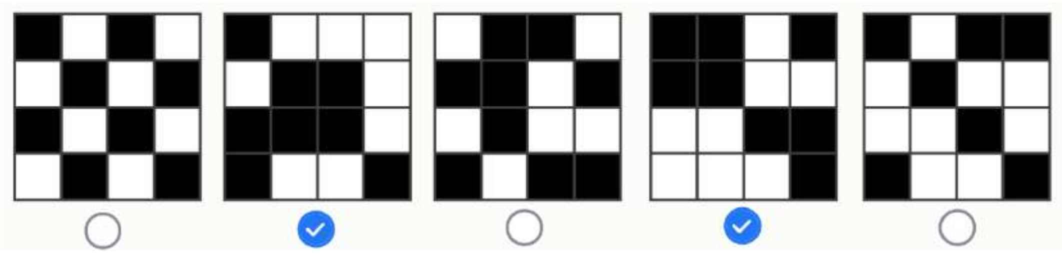


В этот раз у Пети на экране квадрат, раскрашенный, как показано на рисунке.



Какие квадраты сможет получить Петя за один или несколько ходов?

Ответ:



Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Заметим, что указанными перемещениями нельзя поменять количество чёрных квадратов в строке или столбце. Их количество всегда неизменно. Изначально в строках количество черных квадратов 3, 2, 1, 2. В столбцах: 2, 3, 1, 2. Отсюда сразу видно, что не подходят варианты А (везде количество 2), В (количество черных квадратов 9, а было 8), Д (чёрных квадратов 7, а изначально было 8).

Варианты Б и Г получить можно.

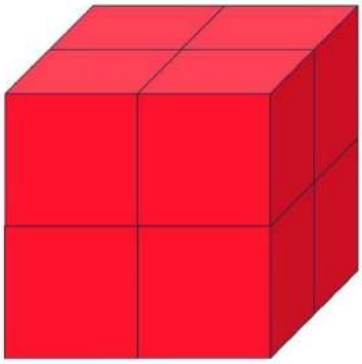
Например:

Б: поменять 1 и 2 столбцы, 3 и 4 столбцы, 1 и 3 строки, 2 и 4 строки.

Г: поменять 2 и 4 столбцы, 2 и 3 строки, 2 и 4 строки.

Задание № 3

Кирилл сложил из нескольких одинаковых красных кубиков куб побольше. Например, на рисунке из кубиков выложен куб со стороной в 2 кубика. Затем Кирилл взял точно такие же по размеру маленькие зелёные кубики и обложил ими в один слой весь красный куб так, что получился куб, зелёный снаружи. Сколько для этого ему понадобилось зелёных кубиков, если красный куб выложен из 125 маленьких?



Ответ: 218

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Из 125 кубиков можно выложить куб со стороной 5 кубиков ($125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$).

После того, как имеющийся куб обложили слоем в один кубик, получился куб со стороной 7. Значит, потраченное количество зелёных кубиков:

$$7 \cdot 7 \cdot 7 - 125 = 343 - 125 = 218.$$

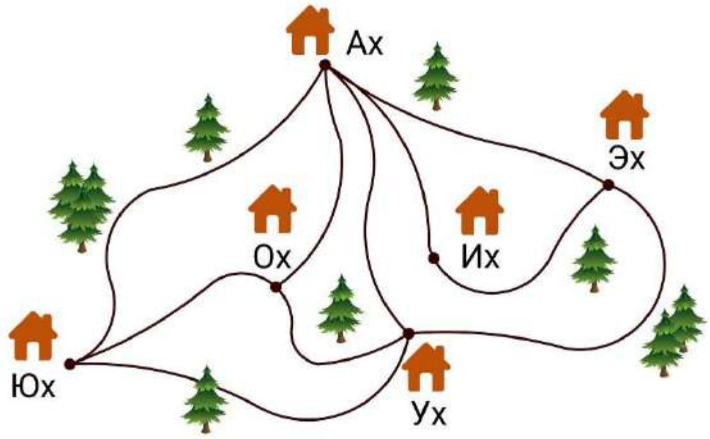
Можно посчитать другим способом. На каждую грань нового кубика потратили 25 кубиков (чтобы просто повторить грань маленького кубика).

Всего граней 6, то есть $25 \cdot 6 = 150$. Но ещё 12 рёбер — на них потрачено по 5 кубиков, всего $5 \cdot 12 = 60$ и 8 угловых кубиков. Итого:

$$150 + 60 + 8 = 218 \text{ кубиков}.$$

Задание № 4

Филя нашёл старую таблицу расстояний (по дорогам) между сёлами, но названия всех сёл, кроме Ох, оказались стёрты. Филя нарисовал схематическую (то есть если на рисунке одна дорога длиннее другой, то на самом деле может быть не так) карту дорог.



Установите соответствие между названиями сёл и их номерами, пользуясь таблицей. Если клетка пуста, это значит, что прямой дороги между сёлами нет.

		Названия сёл					
		№1	№2	№3	№4	№5	Ох
Названия сёл	№1		2	5	8	6	3
	№2	2		1			
	№3	5	1		4		
	№4	8		4		4	6
	№5	6			4		3
	Ох	3			6	3	

Ответ:

№ 1	Ах
№ 2	Их
№ 3	Эх
№ 4	Ух
№ 5	Юх

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.
Заметим, что нам неважны численные значения длин дорог, важно только их количество. На карте имеется только один населенный пункт (Ах), который соединен со всеми остальными. Значит, первый столбец и первая строка — это Ах. Также отмечен только один пункт (Их), из которого выходят только две дороги. Значит, второй столбец и вторая строка — это Их. Аналогично определяется пункт Ух, из которого выходит ровно 4 дороги. Осталось определить только два пункта Эх и Юх. На карте Юх соединен с Ох, а Эх — нет. Поэтому, предпоследняя строка это Юх, а третья — это Эх.

Задание № 5

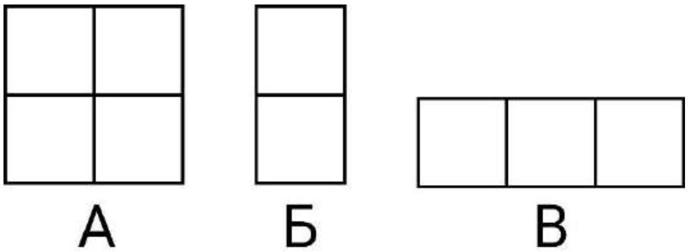
В одной семье детей зовут Саша, Женя и Валя. Все они родились в один день, но в три разных года. Известно, что Саша старше своего брата на 10 лет, а возраст одной из девочек равен сумме возрастов её брата и сестры. Также известно, что сумма возрастов всех детей равна 40 годам, а Женя не младше всех.
Как зовут мальчика?
Ответ: Валя
Сколько лет Саше?
Ответ: 15
Сколько лет Жене?
Ответ: 20
Сколько лет Вале?
Ответ: 5
Точное совпадение ответов — 1 балл
Решение.

Из условия известно, что в этой семье две девочки и один мальчик. Так, возраст одной из девочек равен сумме возрастов её брата и сестры, а если сумма возрастов всех детей равна 40 лет, то самая старшая — девочка, и ей 20 лет ($40 \div 2 = 20$), а сумма возрастов мальчика и девочки младше её равна также 20 лет. Так как Саша старше своего брата на 10 лет, и все эти дети родились в один день, но в три разных года, значит, среди них нет ровесников. Если бы Саша была старшей девочкой возраста 20 лет, то брат и сестра родились в один год (так как сумме должно было получиться 20 лет). Значит, Саша — не старший ребенок, а сумма возрастов девочки Саши и младшего мальчика равны 20 и разница в возрастах равна 10 годам, этого младшего ребенка зовут не Саша и не Женя, а значит младшему мальчику 5 лет и его зовут Валя. Тогда девочке Саше 15 лет. Отсюда следует, что старшую девочку зовут Женя, ей 20 лет (как было установлено ранее).

Задание № 6

В автомате продаются шоколадки трёх видов — А, Б и В. Макс хочет купить несколько шоколадок, чтобы из некоторых из них (не ломая) сложить квадрат 3 × 3. Он видит, что в автомате лежит 1 шоколадка вида А, 3 — вида Б и 7 — вида В. Шоколадки выдаются случайным образом, выбрать конкретные нельзя.

Какую минимальную сумму стоит приготовить Максу, чтобы наверняка справиться с задачей, если одна шоколадка стоит 100 руб? Ответ выразите в рублях.



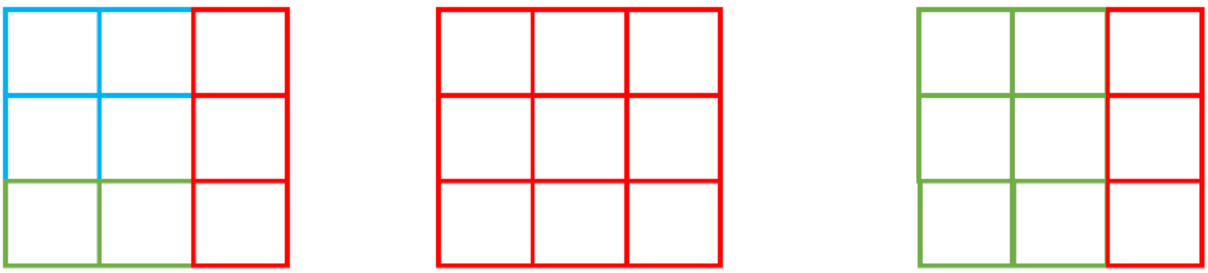
Ответ: 500

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Составить квадрат 3 × 3 можно тремя способами:

1) из трех фигурок вида В;
2) из трех разных фигурок — А, Б и В;
3) трех фигурок вида Б и одной фигурки вида В.



Докажем, что 4 фигурок может не хватить, а пяти всегда достаточно.

Если вытащить 1 квадратик (фигура А) и 3 короткие полоски (фигуры Б), то собрать квадрат 3 × 3 не получится. Действительно, в любых трёх из этих фигур в сумме 8 или меньше клеток, а во всех 4 фигурах — 10 клеток, в то время как в квадрате 3x3 — девять клеток.

Если же вытащить 5 фигурок, то там обязательно будет длинная полоска (фигура вида В), поскольку всех остальных в сумме только 4. Рассмотрим, какие фигуры будут среди этих четырёх — либо там есть ещё две вида В (и квадрат 3 × 3 складывается), либо только одна, но тогда среди остальных трёх либо три вида Б и квадрат составляется третьим способом, либо есть фигура вида А и квадрат составляется первым способом.

Задание № 7

У Васиного дедушки на стене висят четверо часов. Вася знает, что ни одни из них не показывают точное время: какие-то спешат на полчаса, а какие-то отстают на два часа. А ещё двое тоже врут, но как именно, Вася не помнит. Однажды Вася пришёл в гости к дедушке и увидел, что часы показывают время так, как изображено на рисунке.

Во сколько Вася пришёл к дедушке? Ответ запишите в формате ЧЧ:ММ.
Ответ: 06:45 или 18:45
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.
Разница в показаниях часов, о которых Вася знает, равна 2.5 часа. То есть, минутные стрелки у них должны быть точно противоположно направлены. Такая пара часов только одна: вторые и четвёртые. Проверяем: действительно разница между их показаниями как раз 2,5 часа. Те, что показывают большее время — спешат на полчаса. Значит, сейчас не 7:15, а 6:45.

Задание № 8

В группе из 10 рыцарей и лжецов все разного роста. Каждый заявил: «Среди нас найдутся 2 лжеца выше меня и 2 лжеца ниже меня». Сколько среди этих 10 человек может быть лжецов? Укажите все варианты.
Ответ: 4
Точное совпадение ответа — 1 балл
Решение.

Заметим, что лжецов не может быть больше четырёх, так как если их хотя бы пять, то будет хотя бы один (третий по росту среди лжецов, например), кто скажет правду. Если же лжецов 4 или меньше, то при любом их расположении они солгут, так как лжецов, о которых они могут сказать, в сумме не более трёх. Таким образом, рыцари тоже должны быть. Но их слова должны быть правдой. Значит, лжецов не может быть меньше 4.

Следовательно, лжецов ровно 4. Осталось указать их возможное расположение, то есть показать, что такое возможно. Единственный подходящий вариант такой (все стоят по возрастанию роста): ЛЛРРРРРРЛЛ.