ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2024 г.

ПРИГЛАСИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. 5 КЛАСС

ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1

В магазине проводится акция: каждая четвертая шоколадка стоит 70 рублей. Маша купила 10 шоколадок и заплатила 1020 рублей. Сколько рублей нужно было бы заплатить Маше, если она решит купить одну шоколадку?

Ответ: 110

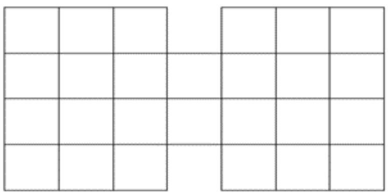
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Из условия следует, что 4-я и 8-я шоколадка стоили по 70 рублей. Тогда оставшиеся восемь шоколадок стоили вместе $1020 - 2 \cdot 70 = 880$ рублей. Значит одна шоколадка стоит $880 : 8 = 110$ рублей.

Задание № 2

Незнайка хочет закрасить в фигуре, изображенной на рисунке, четыре клетки, образующие квадратик 2×2. Сколькими способами он может это сделать?

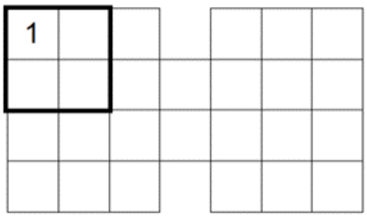


Ответ: 14

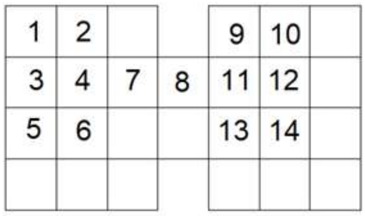
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Квадратик из 4 клеток однозначно определяется его левой верхней клеткой. Например, самый левый верхний квадратик однозначно определяется клеткой, отмеченной цифрой 1.



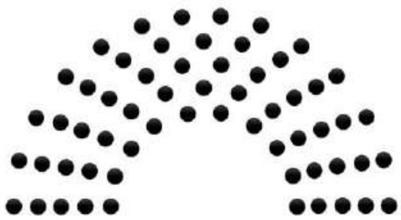
Пронумеруем каждую клетку, которая определяет левую верхнюю клетку квадрата 2 × 2.



Всего получилось 14 клеток, значит отметить можно 14 квадратов.

Задание № 3

В аудитории, где проходила олимпиада, ряды расположены полукругом. В первом ряду 10 мест, во втором – 11, в третьем – 12 и т.д. В последнем – 25 мест. Пришедших на олимпиаду школьников рассадили так, что никакие два участника не сидели на соседних местах в одном ряду. Какое максимальное количество школьников могло присутствовать на олимпиаде?



Ответ: 144

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Так как можно разбить места в ряду на пары 1-2, 3-4, ..., то в любом ряду с четным числом участников мы можем посадить не более половины, а в любом ряду с нечетным числом участников (n) мы можем посадить не более (n + 1)/2 участников. Тогда всего можно посадить не более чем 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 9 + 10 + 10 + 11 + 11 + 12 + 12 + 13 = 5 + 13 + 2 · (6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) = 144 участника. Заметим, что если сажать каждого участника на места с нечетным номером в ряду, то можно посадить ровно 144 человека.

Задание № 4

Пекарь испек большой прямоугольный пирог и собирается его разрезать. Он может делать разрез вдоль любой из сторон от одного края пирога до другого. Какое наименьшее число разрезов он должен сделать, чтобы получить ровно 18 частей?

Ответ: 7

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Если все разрезы параллельно друг другу, то для того, чтобы получить 18 частей необходимо сделать 17 разрезов.

Пусть теперь есть и горизонтальные и вертикальные разрезы. Пусть при этом образовалось $a \geq 2$ столбцов и $b \geq 2$ строк, без ограничения общности будем считать, что $a \leq b$. Получаем, что $ab = 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$. Возможны два варианта: $a = 2$, $b = 9$ и $a = 3$, $b = 6$. В первом случае сделано $a - 1 + b - 1 = 9$ разрезов, а во-втором случае $2 + 5 = 7$ разрезов. Наименьшее из полученных значений равно 7.

Задание № 5

Путешественник, прогуливаясь по необитаемому острову, встретил там 5 аборигенов. Каждый абориген на острове либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый из аборигенов сказал: «По крайней мере один из нас – рыцарь». Сколько рыцарей могло быть среди этих аборигенов?

Ответ: 0 или 5

Точное совпадение ответов — 1 балл

Решение.

Рассмотрим 2 случая:

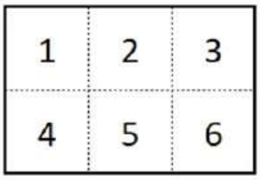
1. Если на острове есть хотя бы один рыцарь, то фраза «По крайней мере один из нас – рыцарь» будет истиной. Значит лжец не мог ее произнести и все кто ее произнес – рыцари.

Т.е. в этом случае на острове путешественник встретил 5 рыцарей.

2. Если на острове нет рыцарей, то фраза «По крайней мере один из нас – рыцарь» будет ложью. Значит все кого встретил путешественник – лжецы. Так как оба случая возможны, то на острове могло быть 0 или 5 рыцарей.

Задание № 6

Лист бумаги разделён на квадраты, в которых записаны цифры от 1 до 6, как показано на рисунке, причём каждый квадрат пронумерован одной и той же цифрой с лицевой и тыльной стороны. Листок складывается по пунктирным линиям. Таким образом получается стопка из 6 квадратов, где каждый квадрат имеет номер. Какое число НЕ может быть на нижнем квадрате, если число 1 находится на верхнем квадрате?

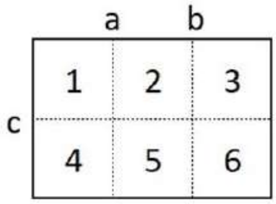


Ответ: 5

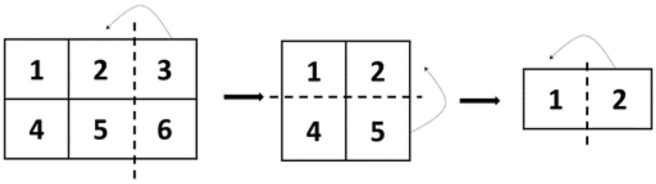
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

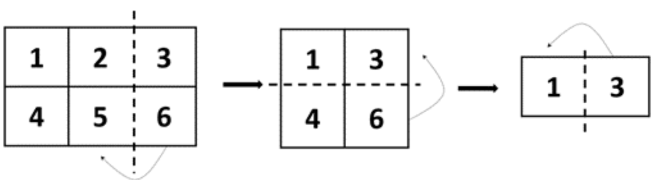
Обозначим линии **a**, **b**, **c** как на рисунке.



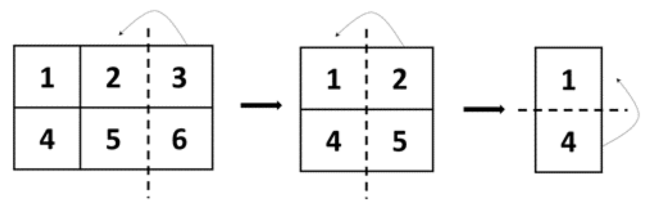
1. Для того, чтобы получить число 2 на нижнем квадрате, сгибаем вначале по линии **b** от себя, затем по линии **c** от себя и, наконец, по линии **a** от себя.



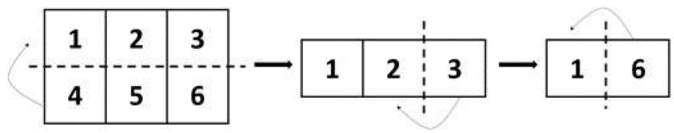
2. Для того, чтобы получить число 3 на нижнем квадрате сгибаем по **b** на себя, по **c** от себя, по **a** от себя.



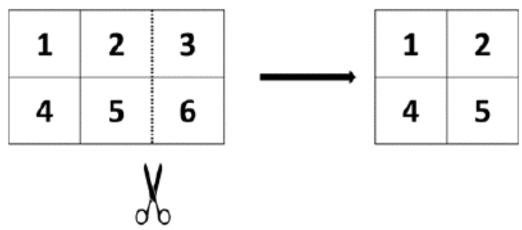
3. Для того, чтобы получить число 4 на нижнем квадрате сгибаем по **b** от себя, по **a** от себя, по **c** от себя.



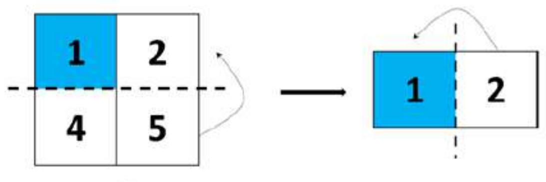
4. Для того, чтобы получить число 6 на нижнем квадрате сгибаем по c от себя, по b на себя, по a от себя.

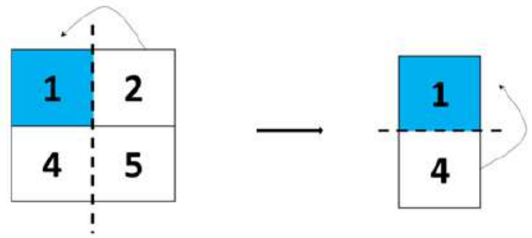


5. Докажем, что 5 не может оказаться нижнем квадрате двумя способами.
1 способ. Предположим, что число 5 оказалось на нижнем квадрате. Тогда квадраты 3 и 6 будет находиться где-то в середине стопки между квадратом 1 и квадратом 5. Их можно вырезать из стопки по границам соседних сторон 2-3, 3-6, 6-5 и при этом ничего не изменится. Поэтому просто обрежем квадраты 3 и 6.
Получаем, если можно сложить лист бумаги 2×3 указанным образом, то можно сложить и лист 2×2 с числами 1, 2, 4, 5 (см. рисунок).

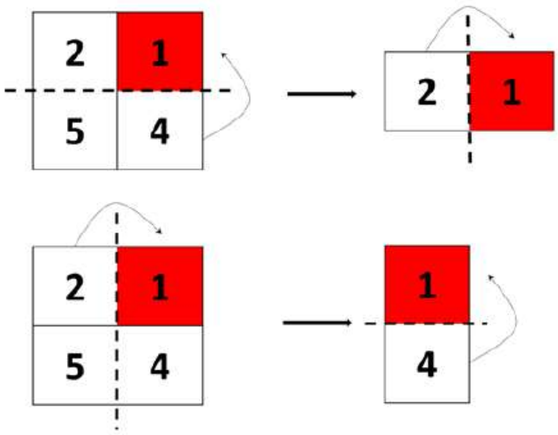


Покрасим лицевую сторону квадрата 1 в синий цвет, а его тыльную сторону в красный. Пусть мы смогли сложить квадрат 2×2 так, что сверху находится синяя единица. Тогда складывать лист можно только одним из двух способов, приведенных на рисунках.

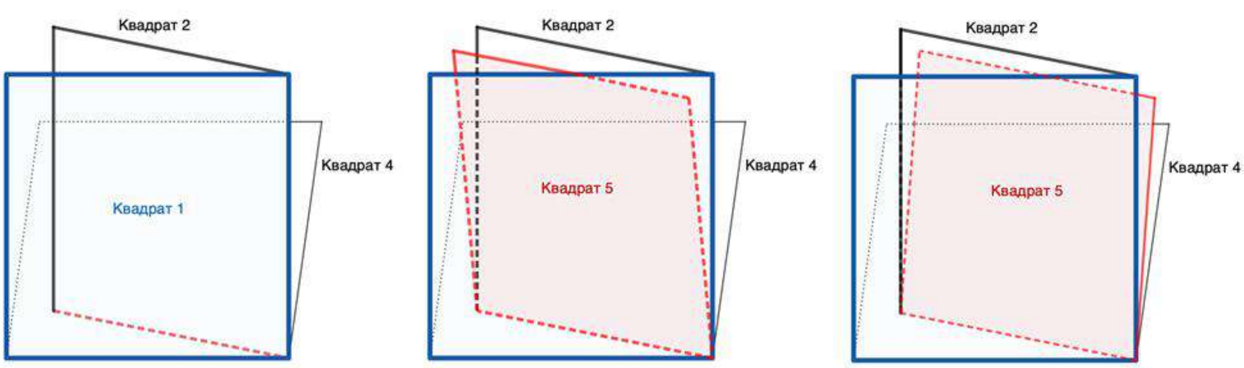




На верхнем рисунке первый изгиб делается по горизонтали, а второй по вертикали. На рисунке внизу наоборот. Так как мы зафиксировали цвет квадрата с единицей, то изгибы можно делать только от себя. В первом случае получаем 2, а во втором 4 снизу стопки. То есть в обоих случаях получить 5 на тыльной стороне не удастся. Совершенно аналогично проводятся рассуждения, если сверху находится красная единица (см. рисунок).

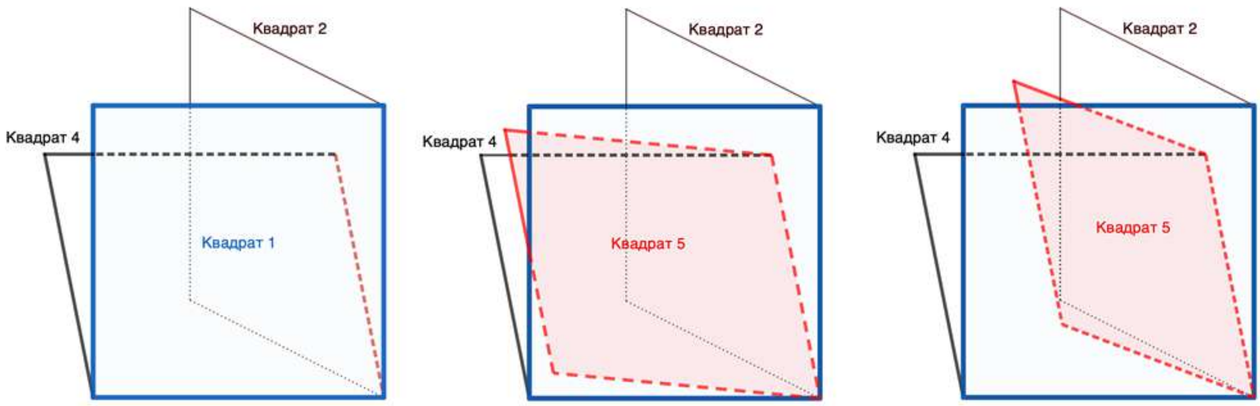


2 способ. Предположим, что число 5 оказалось на нижнем квадрате. Пусть единица на верхнем квадрате видна для нас своей лицевой стороной (случай, когда единица видна тыльной стороной рассматривается аналогично). Рассмотрим квадраты с номерами 2 и 4.
Случай 1. Квадрат 2 находится выше квадрата 4. При этом квадрат 1 граничит с квадратом 4 по нижней границе, а с квадратом 2 – по правой границе (рисунок слева). В таком случае, квадрат 5 граничит с квадратом 2 по стороне, отмеченной красным цветом. Если перегиб по границе квадратов 2 и 5 был "на себя" то квадрат 5 находится между квадратами 1 и 2 (рисунок в центре), если "от себя" между квадратами 2 и 4 (рисунок справа). Следовательно, квадрат 5 не находится внизу стопки. Противоречие.



Случай 2. Квадрат 2 находится выше квадрата 4. При этом квадрат 1 граничит с квадратом 4 по нижней границе, а с квадратом 2 – по правой границе (рисунок

слева). В таком случае, квадрат 5 граничит с квадратом 4 по стороне, отмеченной красным цветом. Если перегиб по границе квадратов 4 и 5 был "на себя" то квадрат 5 находится между квадратами 1 и 4 (рисунок в центре), если "от себя" между квадратами 4 и 2 (рисунок справа). Следовательно, квадрат 5 не находится внизу стопки. Противоречие.



Задание № 7

Фишка двигается по прямоугольной таблице 2×3, начиная с произвольной клетки и переходя в соседнюю по стороне клетку. Каждая клетка, в которой побывала фишка помечается числом от 1 до 6 в порядке посещения по возрастанию номера. Клетку можно посетить ровно один раз. Для каждой клетки Дима выписал сумму чисел в клетках, граничащих с ней по стороне. Костя сложил все числа, выписанные Димой. Какую наибольшую сумму мог получить Костя?

Ответ: 51

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

a	b
c	d
e	f

Обозначим итоговые числа в таблице a, b, c, d, e, f как на рисунке. Тогда, Дима выписал числа $b + c$, $a + d$, $a + d + e$, $b + c + f$, $c + f$, $e + d$. Их сумма равна $2(a + b + c + d + e + f) + c + d = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + c + d = 42 + c + d$.

Заметим, что без учёта симметричных случаев, существует всего 4 вида обхода доски. Действительно, начало обхода может быть либо в углу, либо в среднем ряду.

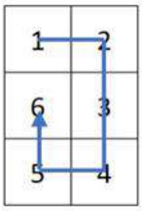
Случай 1. Начало обхода в углу доски. Без ограничения общности будем считать, что в левом верхнем углу.

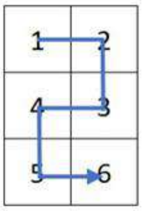
Случай 1а. Если клетка 2 в правом верхнем углу, то клетка 3 посещается однозначно (рисунки 1 и 2). Если после клетки 3 идём вниз, то оставшиеся клетки определяются однозначно (рисунок 1). Если же после клетки 3 идём влево, то и здесь оставшиеся клетки определяются однозначно (рисунок 2).

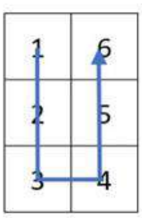
Случай 2а. Если из клетки 1 идём вниз, то далее обязательно вниз ещё раз. Действительно, если из клетки 2 пойти вправо, то либо верхняя, либо две нижние клетки останутся не пройденными. После клетки 3 оставшиеся клетки определяются однозначно (рисунок 3).

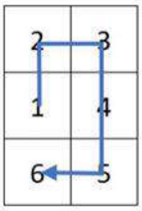
Случай 2. Начало обхода в среднем ряду. Без ограничения общности будем считать, что клетка 1 – левая во втором ряду. Если из клетки 1 пойти вправо, то либо две клетки в первом ряду, либо две клетки в третьем ряду останутся не пройденными. Поэтому из клетки 1 нужно идти вверх или вниз. Без ограничения общности пойдём вверх. Тогда, оставшиеся клетки определяются однозначно (рисунок 4).

Для них c+d принимает значения 1+4, 3+6, 2+5, 3+4. Наибольшее из них 3+6 = 9. Поэтому, ответ в задаче 42 + 9 = 51.









Задание № 8

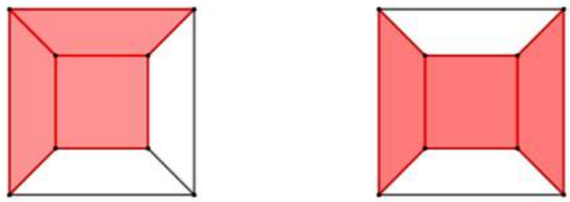
У куба три грани покрашены в красный цвет, три – в белый. Незнайка написал на каждой грани куба какое-то число. Знайка для каждого числа на красной грани посчитал сумму чисел на четырёх соседних с ней гранях и получил 33, 36 и 39. Найдите сумму всех чисел, написанных Незнайкой.

Ответ: 54

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Возможные два случая расположения красных граней (остальные получаются поворотом кубика):



1) Три красные грани имеют общую вершину. В этом случае каждая грань куба граничит с двумя красными и двумя белыми гранями. Тогда, в сумме 33 + 36 + 39 = 108, каждое число, записанное на грани куба будет посчитано дважды. И сумма всех чисел, написанных Незнайкой будет равна 108/2 = 54.

2) Три красные грани не имеют общей вершины. Заметим, что в этом случае найдется пара красных граней, которые не являются соседними. Тогда для них суммы на соседних гранях будут одинаковыми, так как это суммы одних и тех же чисел. Однако, по условию все три суммы, полученные Незнайкой различны. Значит этот случай невозможен.