ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2024 г.
ПРИГЛАСИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС
ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Максимальное количество баллов — 8.

Задание № 1

Учительница составляет варианты для контрольной работы. Каждый вариант устроен так: учительница в произведении

$$345612 \cdot 653209$$

между какими-то двумя цифрами в каждом числе ставит запятую. Учительница выбирает варианты так, чтобы ответы во всех вариантах были различными. Какое наибольшее число вариантов удастся выбрать учительнице?

Ответ: 9.

Точное совпадение ответа — 1 балл

*Решение***.**

Что значит «между какими-то двумя цифрами числа поставить запятую»? Это значит «поделить число на некоторую степень 10».

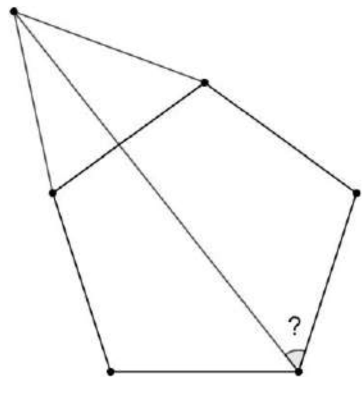
Например, $3456{,}12 = \frac{345612}{10^2}$.
Следовательно, ответ в каждом варианте будет равен

$$\frac{345612}{10^k} \cdot \frac{653209}{10^l} = \frac{653209 \cdot 345612}{10^{k+l}}$$

для некоторых k и ℓ.
Какие значения могут принимать k и ℓ? Наименьшая степень 10, на которую можно поделить 345612 равна 1 (т. е. $k \geqslant 1$), а наибольшая равна 5 (для числа 3,45612; т. е. $k \leqslant 5$). Аналогично, $1 \leqslant \ell \leqslant 5$. Значит, $2 \leqslant k + \ell \leqslant 10$, т. е. $k + \ell$ принимает 9 значений, значит и вариантов максимум получится 9.

Задание № 2

К правильному пятиугольнику приставили правильный треугольник. Чемуравна градусная мера угла, обозначенного знаком «?»?



Ответ: 54.

Точное совпадение ответа — 1 балл

*Решение***.**

Главное наблюдение в этой задаче — картинка симметрична относительно отрезка, соединяющего вершину пятиугольника и вершину треугольника.
Значит, ответ — половина угла правильного пятиугольника, т.е.

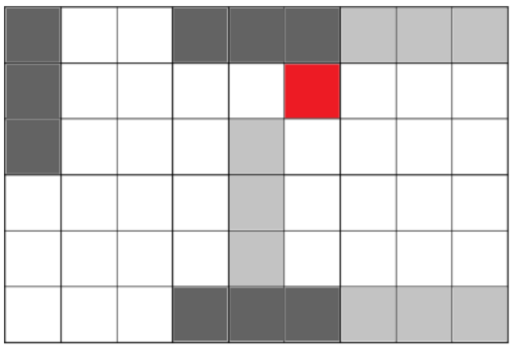
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ \cdot (5-2)}{5} = 54^\circ$$

Комментарий. Рассуждение выше неправильно называть «доказательство», ведь мы никак не доказали, что картинка и правда симметрична. Однако это легко сделать, если сказать, что картинка симметрична относительно серединного перпендикуляра к общей стороне пятиугольника и треугольника (а не просто отрезка из условия).
Тот факт, что правильный *n*-угольник симметричен относительно любого серединного перпендикуляра к стороне, уже легко доказывается. Например, можно проверять это последовательно: концы стороны – по определению серединного перпендикуляра. Следующая пара вершин получается поворотом на один и тот же угол и откладыванием отрезка одной и той же длины, и так далее.
Комментарий. В решении мы воспользовались формулой для угла правильного n-угольника:

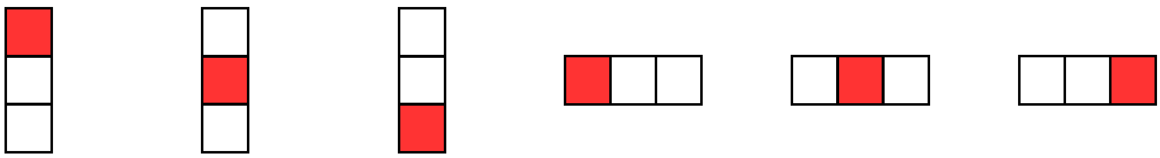
$$\frac{180^\circ\,(n-2)}{n}.$$

Задание № 3

Прямоугольник 6×9 покрыт 18 непересекающимися прямоугольниками 1×3 (прямоугольники лежат по клеточкам). Некоторые из прямоугольников разрезания отмечены на рисунке ниже.



Как может быть покрыта отмеченная красным клетка? Выберите все возможные варианты:



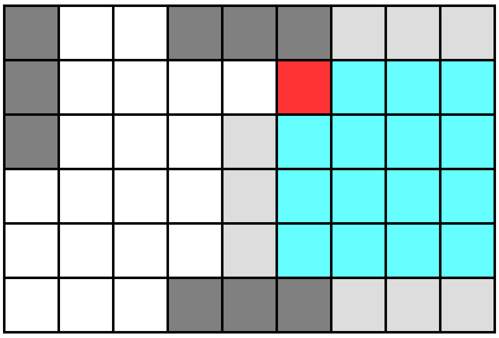
a) b) c) d) e) f)

Ответ: f.

Точное совпадение ответа — 1 балл

*Решение***.**

Для решения достаточно заметить квадрат 4×4, образованный 15 бирюзовыми и одной красной клетками (см. рисунок):



Квадрат состоит из 16 клеток, т.е. нельзя покрыть их все прямоугольниками 1×3 (т. к. 16 не делится на 3). Значит, часть прямоугольников должна «вылазить» за границу квадрата. Единственное место, где можно это сделать — через красную клетку.
Так как 16 даёт остаток 1 при делении 3, то и убрать надо ровно одну клетку. Из всех вариантов тогда подходит только f.

Задание № 4

По кругу через равные промежутки растут 846 яблонь. Поздней осенью на каждой из них осталось 1, 2, 3, 4 или 5 яблок. Оказалось, что количества яблок на любых двух рядом растущих яблонях отличаются ровно на 1. Одно яблоко растёт на 200 яблонях, три — на 21. А на скольких яблонях растёт пять яблок?

Ответ: 202.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Главное наблюдение в этой задаче — яблони с чётным (2, 4) и нечётным (1, 3, 5) количествами яблок чередуются.
После него задача решается быстро: так как они чередуются, то яблонь с 2 и 4 яблоками столько же, сколько и с 1, 3 и 5. Значит, яблонь с 1, 3 и 5 яблоками ро́вно половина: 846/2 = 423. Нам дано, что из этих 423 яблонь 200 и 21 — это яблони с 1 и 3 яблоками. Значит, оставшиеся 423 − 200 − 21 = 202 — с 5 яблоками.

Задание № 5

Два действительных числа a и b таковы, что выполняется равенство

$$a^2 + 6a = 2b^2 + 11b - 15.$$

Известно, что если изменить a, то равенство точно перестанет быть верным. Найдите все возможные значения b.

Ответ: –6 и 0,5.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Самое главное в этой задаче — понять, что значит фраза «если изменить a, то равенство точно перестанет быть верным». Для этого можно спроситьсебя — а как вообще может так быть, что мы a изменили, а равенство осталось верным? Если вместо a подставить a', то равенство превратится в

$$(a')^2 + 6a' = 2b^2 + 11b - 15,$$

а правая часть этого выражения, как мы знаем, равна $a^2 + 6a$. Значит, если мы изменили a на a', а равенство осталось верным, то должно выполняться равенство

$$a^2 + 6a = (a')^2 + 6a'.$$

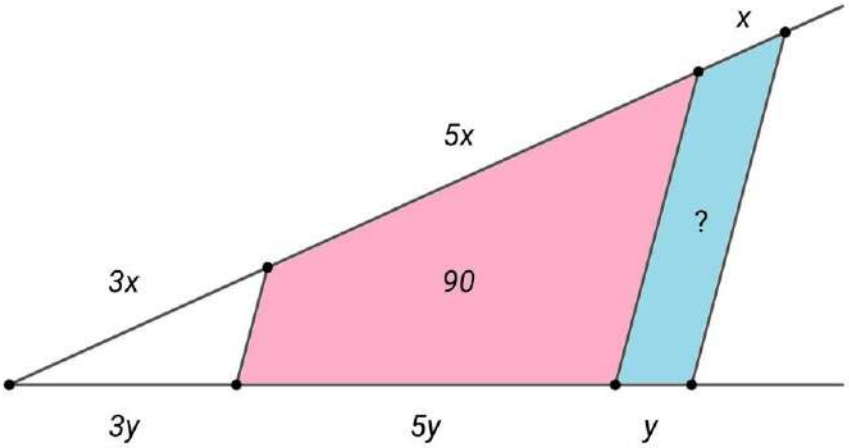
Тогда $(a - a')(a + a' + 6) = 0$. Поскольку $a \neq a'$ (мы же меняем число a), то $a + a' = -6$. Значит, для любого числа a в качестве a' можно взять $-6 - a$. Следовательно, a, которое подходит, должно удовлетворять условию $a = -6 - a$ (иначе можно поменять a на $-6 - a$ и значение левой части не изменится), т. е. $a = -3$.

Осталось ответить на вопрос задачи. Если $a = -3$, то $2b^2+11b-15 = (-3)^2+6\cdot(-3)$, т. е. $2b^2 + 11b - 6 = 0$. Решая квадратное уравнение, получаем ответы -6 и ½.

Комментарий. Можно было пойти другим путём. Равенство $a^2 + 6a = (a')^2 + 6a'$ можно переписать в виде $f(a) = f(a')$, где $f(x) = x^2 + 6x$. Тут написано, что значение $C = f(a)$ функция $f(x)$ принимает хотя бы два раза. Функция $f(x)$ — это квадратный трёхчлен. Она почти все свои значения принимает ровно два раза. Кроме значения в вершине параболы $y = f(x)$, т.е. как раз при $a = \frac{-6}{2\cdot 1} = -3$.

Задание № 6

Три параллельные прямые пересекают угол и на каждой стороне высекают отрезки, которые относятся как 3 : 5 : 1 (см. рисунок). В результате образовались две трапеции. Площадь красной трапеции равна 90. Найдите площадь синей трапеции, отмеченной знаком «?».



Ответ: 306/11.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Обозначим площадь белого треугольника через S, а площадь синей трапеции через t. Тогда из подобия треугольников, получаемых при пересечении угла параллельными прямыми, имеем:

$$\frac{S+90}{S}=\left(\frac{3+5}{3}\right)^2,$$
$$\frac{S+90+t}{S}=\left(\frac{3+5+1}{3}\right)^2.$$

Из этих двух равенств необходимо найти t. Приведём один из возможных способов,как это можно сделать. Вычтем из обоих равенств по 1:

$$\frac{90}{S}=\left(\frac{8}{3}\right)^2-1,$$
$$\frac{90+t}{S}=\left(\frac{9}{3}\right)^2-1$$

и поделим второе на первое:

$$\frac{90+t}{90}=\frac{9^2-3^2}{8^2-3^2}$$

т.е.

$$t=90\cdot\left(\frac{9^2-3^2}{8^2-3^2}-1\right)=90\cdot\left(\frac{9^2-8^2}{8^2-3^2}\right)=\frac{90\cdot17}{5\cdot11}=\frac{18\cdot17}{11}=\frac{306}{11}.$$

Задание № 7

Сколько существует натуральных чисел x, для которых найдутся натуральные числа y и z, что

$$2x + 3y + 6z = 1200?$$

Ответ: 198.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Заметим, что все слагаемые, кроме $2x$, делятся на 3. Тогда и $2x$, а с ним и x, делится на 3. Аналогично, y делится на 2.
Значит, $x = 3x'$, $y = 2y'$. Подставим:

$$6x' + 6y' + 6z = 1200,$$

откуда $x' + y' + z = 200$. В таком виде очевидно, что x' (а с ним и $x = 3x'$) принимает все значения от 1 до 198, т.е. 198 значений.

Задание № 8

8100 школьников встали в шеренгу. По команде «Рассчитайсь!» они по порядку стали называть свои номера: «Один!», «Два!», . . . , «Восемь тысяч сто!». После этого каждый, кто оказался на месте, номер которого — квадрат натурального числа (т. е. $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, . . .), ушёл играть в футбол. Оставшиеся школьники повторили этот процесс: встали в шеренгу, выкрикнули номера, школьники с номерами — точными квадратами — ушли играть в футбол. Так они повторяли до тех пор, пока количество оставшихся школьников впервые не стало меньше 520. Сколько школьников осталось в этот момент?

Ответ: 506.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Не побоимся, введём обозначение $n^2 = 8100$ и посчитаем количество оставшихся школьников, используя переменную n.
После первого раза их, очевидно, будет $n^2 - n$. После второго — ещё на $n - 1$ меньше (ведь $(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1 \leqslant n^2 - n < n^2$, т.е. последний школьник, номер которого — квадрат натурального числа, это школьник с номером $(n - 1)^2$). Значит, $n^2 - n\ (n - 1) = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$.
Итак, за два действия из n^2 получается $(n - 1)^2$. Значит, процесс раз в два шага попадает в квадрат натурального числа. В какой-то момент количество школьников будет $23^2 = 529$, а в следующий раз — $529 - 23 = 506$, это и есть ответ.