

## Разбор задач

**Задача 1. Квадрат**

Центральная клетка принадлежит четырём квадратам  $2 \times 2$ , четыре клетки посередине сторон — двум квадратам каждая, а клетки в углах — только одному квадрату. Поэтому в центре должно стоять число 9, а в углах — числа 1, 2, 3, 4. На серединах сторон должны стоять числа 5, 6, 7, 8. Любой ответ, соответствующий этим условиям, будет правильным.

```
1 5 2
6 9 7
3 8 4
```

**Задача 2. Переправа**

Сначала нужно перевезти детей 6 и 8 лет, это единственный способ оставить на левом берегу троих (5, 7 и 9 лет) так, чтобы избежать конфликта. Затем мама должна вернуться назад и перевезти любых двоих из оставшихся на левом берегу детей, но обратно ей придётся вернуться с детьми 6 и 8 лет. Их она оставит на левом берегу, перевезёт того оставшегося ребёнка, который ждёт на левом берегу с самого начала, вернётся и заберёт детей 6 и 8 лет. Пример такого решения.

```
6 8
-
5 9
6 8
7
-
6 8
```

**Задача 3. Чаепитие**

Для чаепития необходима такая расстановка предметов: X, ..., X, B, ..., B, Ч, ... Ч. Нам необходимо получить перестановку предметов, для которой получение такой последовательности потребовало бы как можно больше операций. Поэтому в ответе не могут идти буквы X и B подряд, иначе, переставив их местами, мы получим большее число операций. Также подряд не могут идти буквы B и Ч. То есть ответ всегда имеет вид Ч, ..., Ч, B, ..., B, X, ..., X. Осталось только понять, сколько нужно взять чая, варенья и хлеба в ответе.

Пусть в ответе чай встречается  $x$  раз, варенье встречается  $y$  раз, хлеб встречается  $z$  раз,  $x + y + z = n$ . Посчитаем количество секунд, необходимых для приведения такой перестановки в порядок. Нам придётся поменять местами каждую порцию чая и варенья, это займёт  $xy$  секунд. Аналогично понадобится  $yz$  секунд, чтобы поменять варенье и хлеб и  $xz$  секунд, чтобы поменять чай и хлеб. Нужно подобрать такие значения  $x, y, z$ , чтобы сумма  $xy + yz + xz$  была максимальной.

Интуитивно понятно, что числа должны быть равны или близки (отличаться на 1). Докажем это. Пусть, например, числа  $x$  и  $y$  отличаются на 2 и более, то есть  $x \geq y + 2$ . Рассмотрим новую последовательность, в которой  $x$  будет на 1 меньше, а  $y$  увеличим на 1. Тогда для новой последовательности ответ равен  $(x - 1)(y + 1) + (x - 1)z + (y + 1)z = xy + x - y - 1 + xz + yz$ , то есть ответ изменится на  $x - y - 1$ , и если  $x - y \geq 2$ , то продолжительность увеличится. Таким образом, в правильном ответе среди чисел  $x, y, z$  не должно быть различающихся на 2 и более.

Итак, если  $n$  делится на 3, то необходимо взять  $x = y = z = n/3$ . Если  $n$  не делится на 3, то одно или два из этих чисел нужно увеличить на 1, в зависимости от остатка от деления  $n$  на 3.

Возможный правильный ответ:

```
ЧВХ
ЧЧВВХХ
ЧЧВВХХХ
ЧЧЧВВВХХХ
```

## Задача 4. Набор на кружки

1. Так как 150 школьников выбрали биологию, количество учеников в школе не может быть меньше 150. Но оно может быть равно 150, если все ученики будут выбирать биологию и ещё одно или два дополнительных занятия.
2. Наибольшее число учеников в школе окажется в случае, если все выбрали разные занятия. Тогда число учеников будет равно  $150 + 130 + 100 = 380$ .
3. Если и биологию, и музыку выбрали 85 учащихся, то только биологию выбрали  $150 - 85 = 65$  учащихся, только музыку выбрали  $130 - 85 = 45$ , а ровно один из этих предметов выбрали  $65 + 45 = 110$  школьников.
4. Поскольку из 250 учащихся биологию выбрали 100 учащихся, шахматы 150, и никто не выбрал и шахматы, и биологию одновременно, то каждый учащийся обязательно выбрал или биологию, или шахматы, то есть нет учащихся, выбравших только музыку. Каждый учащийся, выбравший музыку, выбрал ещё один предмет. При этом музыку и биологию выбрали 60 учащихся, значит, музыку и шахматы выбрали  $130 - 60 = 70$  учащихся.



5. В предыдущем пункте музыку посещают 130 человек, а не посещают  $250 - 130 = 120$  человек, при этом только музыку не посещает никто. Чтобы число учеников, посещающих только музыку, стало равным числу учеников, не посещающих музыку, необходимо, чтобы 120 новых школьников записались только на музыку.

## Задача 5. Кратчайший поезд

Рассмотрим сцепку из вагонов FVGVF. Она удовлетворяет условиям размещения грузовых вагонов и вагонов с ценностями рядом с вагонами охраны и содержит два грузовых вагона и два вагона с ценностями. Нам необходимо использовать две такие сцепки, а ещё в одной сцепке оставить только один вагон с ценностями и один грузовой вагон. Между сцепками вставим локомотивы, получим такое решение:

LFVGVFLFVGVFLGVFL

В этом решении мы использовали минимальное число вагонов охраны, но количество локомотивов можно сократить. Поставим в центр один локомотив, одну сцепку разместим в начале поезда, ещё одну сцепку — в конце. Нам осталось разместить ещё один грузовой вагон и вагон с ценностями, также нам понадобится один вагон охраны. Поскольку длина сцепки равна 5, а подряд могут идти 7 вагонов без локомотива, то слева и справа от центрального локомотива можно разместить ещё по два вагона с каждой стороны. Разместим в центре конструкцию FLGV. Она удовлетворяет условию размещения грузовых вагонов и вагонов с ценностями, и в итоге мы обошлись только одним дополнительным локомотивом. Возможный ответ:

LFVGVFFLGVFVGVFL