Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике
для 6 класса
2024/2025 учебный год
Максимальное количество баллов — 8

Задача 1

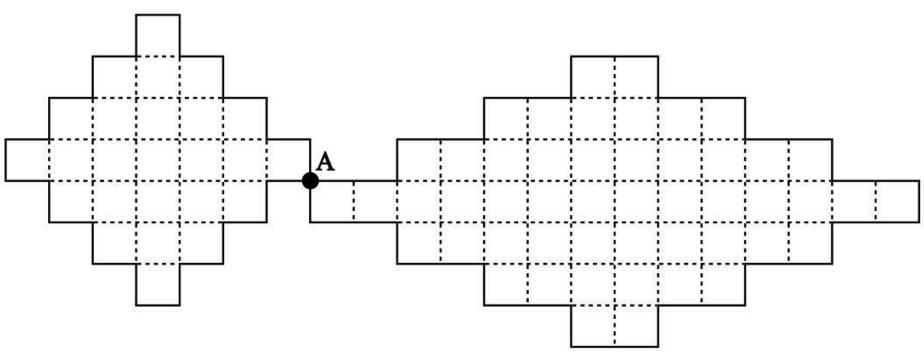
Два арбуза, дыня и четыре нектарина стоят 1000 рублей, а арбуз, две дыни и два нектарина — на 50 рублей дешевле. Сколько стоит набор из арбуза, дыни и двух нектаринов? Ответ выразите в рублях.

<u>Ответ: 650 рублей.</u>

<u>Решение.</u> Из условия получаем, что арбуз, две дыни и два нектарина стоят 950 рублей. Известно, что два арбуза, дыня и четыре нектарина стоят 1000 рублей. Складывая, получаем, что три арбуза, три дыни и шесть нектаринов стоят 1950 рублей, делим на 3 и выясняем, что арбуз, дыня и два нектарина стоят 650 рублей.

Задача 2

Персонаж Ральф живет в компьютерной игре, поэтому озера в его мире имеют форму клетчатых фигур, показанных на рисунке. Каждое утро Ральф идет на пробежку вдоль берега одного из двух озер: начинает в точке А, бежит с постоянной скоростью и заканчивает, когда вновь оказывается в А. Известно, что озеро размером в одну клетку персонаж обежал бы за 2 минуты. На сколько минут одна пробежка Ральфа длится дольше другой?



<u>Ответ: 7.</u>

<u>Решение.</u> Вдоль одной клетки Ральф пробегает за 2 мин = 120 секунд, следовательно, вдоль одной стороны клетки — за 120 : 4=30 секунд. Выясним, на сколько периметр второго озера больше, чем первого. Наборы вертикальных отрезков в озерах совпадают, а каждый горизонтальный отрезок в фигуре справа на 1 длиннее, чем в фигуре слева. Поэтому периметр второй фигуры больше на 7*2=14 (у фигуры в верхней и в нижней

частях по 7 горизонтальных отрезков). Значит, на вторую пробежку Ральф потратит на 14*30 секунд, то есть на 7 минут больше.

Задача 3

По кругу расставлены шестьдесят горшков. В каждом из горшков сидит хотя бы одна лягушка, и в любых трех стоящих подряд горшках суммарно сидит ровно четыре лягушки. Сколькими способами цапля Анастасия сможет выбрать два горшка так, чтобы в них суммарно оказалось ровно три лягушки?

Ответ: 800.

Решение. Если в любых трех подряд идущих горшках сидит суммарно ровно четыре лягушки, и при этом (по условию) ни один из горшков не пустует, то единственное возможное расположение лягушек в горшках – это расположение, при котором в каждом третьем горшке сидит по две лягушки, а в остальных горшках сидит по одной лягушке, то есть 112112112112…, расставленные по кругу, где числа обозначают количество лягушек в одном горшке. Таким образом, ровно в двадцати горшках из шестидесяти сидит по две лягушки, а в остальных сорока сидит по одной лягушке. Чтобы в двух из этих горшков суммарно оказалось ровно три лягушки, нужно взять один горшок, в котором одна лягушка, и один горшок, в котором две лягушки. Всего способов выбрать такие два горшка – $20 \times 40 = 800$ способов, – это и есть ответ.

Задача 4

Аделина, Эвелина и Паулина писали олимпиаду по математике, где за каждую задачу можно было получить некоторое целое неотрицательное количество баллов. После объявления итогов выяснилось, что Аделина и Эвелина показали одинаковый результат, а сумма их баллов больше 15. Сумма баллов всех трех девочек оказалась меньше 60 и в $3\frac{1}{3}$ раза больше, чем набрала Паулина. Сколько баллов на олимпиаде набрала Аделина?

Ответ: 14.

Решение. По условию А = Э. Посчитаем сумму всех баллов двумя способами:
$2А + П = П * 10/3 < 60$, $2А = П * 7/3 < 60 * 7 / 10 = 42$, $Х = П * 7/3 = 2А$, что по условию больше 15, а раз П, А - целые, то Х - четное, кратное 7, большее 15 и меньшее 42. Под эти условия подходит единственное число 28 = 2А. Отсюда, А = 14.

Задача 5

В футбольном турнире принимали участие 35 команд, среди которых команды “Белка” и “Стрелка”. Правила футбольного турнира следующие: каждая команда играет с каждой по одному разу, в каждом матче победившая команда получает 3 очка, проигравшая – 0 очков, а в случае ничьей обе команды получают по 1 очку. По результатам турнира команда “Белка” набрала 100 очков, а команда “Стрелка” со всеми командами сыграла вничью. А какая наибольшая сумма очков могла быть у команды, занявшей второе место по результатам турнира?

Ответ: 97.

Решение: Команда “Белка”, которая набрала 100 очков, могла набрать их только одним единственным способом – если она выиграла у тридцати трех команд и сыграла вничью с оставшейся тридцать четвертой. Именно “Белка” и заняла первое место в турнире – больше нее набрать никто не мог, так как больше могла набрать только команда, которая бы у всех выиграла, но таких команд быть не могло, потому что у “Белки” не выиграл никто. Мы знаем, что команда “Стрелка” со всеми сыграла вничью – а значит, это именно она сыграла с “Белкой” вничью, а все остальные команды “Белке” проиграли. Это значит, что команда, занявшая второе место, в любом случае проиграла “Белке” и сыграла вничью со “Стрелкой”; наибольшее возможное количество очков у нее было бы, если бы у всех остальных команд она выиграла. В этом случае она получила бы $32\times3+1 = 97$ очков. Это и есть ответ.

Задача 6

По кругу стоят N человек, пронумерованных по часовой стрелке от 1 до N. Первый, третий, пятый и так далее до конца нумерации сказали: “Мой сосед слева - рыцарь”. Второй, четвертый, шестой и так далее до конца нумерации сказали: “Мой сосед слева - лжец”. Чему может быть равно число N? (Соседом слева называется следующий по часовой стрелке человек.) Выберите все возможные варианты из предложенных:
21
32
43
54

Ответ: 21, 32.

Решение. Заметим, что слева от нечетного человека стоит человек того же вида, а от четного — противоположного. Значит первый и второй будут одного вида, а третий и четвертый — противоположного. Аналогично можно рассуждать для четверки с третьего до шестого человека. Значит круг выглядит как-то так: РРЛЛРРЛЛ… Посмотрим что происходит на стыке. Если N четно, то первый и последний разных видов, значит пары рыцарей чередуются с парами лжецов, следовательно N кратно четырем. Если N нечетно, то первый и последний одного вида, следовательно N имеет вид $4k+1$.

Задача 7

На каждом шаге к исходному числу можно прибавить единицу или удвоить его. За какое наименьшее число шагов из числа 1 можно получить число 51?

Ответ: 8.

Решение. Пример получения за 8 шагов: 1-2-3-6-12-24-25-50-51. Покажем, что за 7 шагов этого сделать невозможно. Для получения числа 51 последним шагом может быть только 50-51, а первый шаг не зависит от выбора операции. Предположим, что из 2 получили 50 за 5 шагов. Среди этих шагов должна присутствовать первая операция. Иначе за пять шагов получим число $2^6 = 64$. Заметим, что если к числу n применяется сначала первая операция, а затем вторая, то получим число 2n+2. Если наоборот, то 2n+1. Кроме того, в первом случае получается число большее, чем во втором: 2n+2 > 2n+1. Значит, даже если первая операция только одна и выполняется первой, за пять шагов получим: 2-3-6-12-24-48, число 48 меньше, чем 50.

Задача 8

Сколько существует чисел, в 23 раза больших своего наименьшего собственного делителя? (Делитель собственный — если он больше 1, но меньше самого числа).

Ответ: 9.

Решение. Наименьший собственный делитель является простым. Числа представляются в виде 23p, где p — простое, не превосходящее 23. Таких простых чисел 9.