# Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 9 класса, 2024–2025 учебный год

**1.** В актовом зале расставили 25 рядов по 10 стульев в каждом из них. Стулья пронумерованы: сначала от 1 до 10 в первом ряду, потом от 11 до 20 во втором ряду и так далее. Зрителям выдали билеты на спектакль с указанием номера стула. В перерыве решили сделать 25 рядов по 13 стульев в каждом и пронумеровать: сначала от 1 до 13 в первом ряду, потом от 14 до 26 во втором и так далее; зрители сели по указанным в билете номерам. Сколько зрителей теперь оказались в том же ряду, что первоначально?

**Ответ.** 22.

**Решение.** Количество мест в ряду увеличилось на 3, поэтому в первом ряду останутся все 10 зрителей, которые там сидели.

Во втором ряду останутся все, кроме трёх пересевших в первый ряд, — то есть 7 зрителей.

Из третьего ряда вперёд пересядут 6 зрителей: во втором ряду, как мы уже знаем, остались 7 зрителей, поэтому для зрителей из следующих рядов осталось $13 - 7 = 6$ мест, то есть останутся $10 - 6 = 4$ зрителя.

Из четвёртого ряда вперёд пересядет 9 зрителей (так как в третьем ряду остались 4 зрителя, остались $13 - 4 = 9$ мест для зрителей из следующих рядов), останется $10 - 9 = 1$ зритель. Заметим, что теперь в четвёртом ряду осталось $13 - 1 = 12 > 10$ мест для зрителей из следующих рядов, поэтому в пятом и последующих рядах все зрители будут перемещаться хотя бы на один ряд вперёд.

Значит, общее число зрителей, оставшихся в своём ряду, равно $10 + 7 + 4 + 1 = 22$.

**2.** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ отмечена точка $E$. Известно, что $\angle EBC = 25°$, $\angle BCA = 32°$, $\angle BAC = 60°$. Точка $D$ на плоскости такова, что $AD \parallel BE$. Какое наименьшее значение может принимать величина угла $\angle DAB$? Ответ выразите в градусах.

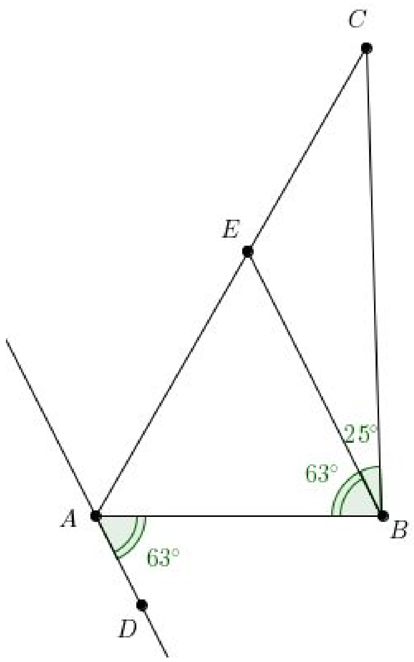
**Ответ.** 63.

**Решение.** Так как

$$\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle BCA) = 180° - (60° + 32°) = 88°,$$

то

$$\angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = 88° - 25° = 63°.$$




Проведём прямую $\ell \parallel BE$ — на ней лежит точка $D$ из условия.

Если точка $D$ в той же полуплоскости относительно прямой $AC$, что и точка $B$, то $\angle DAB = \angle ABE = 63°$ (накрест лежащие при параллельных прямых $AD$ и $BE$ и секущей $AB$).

Если точка $D$ в другой полуплоскости относительно прямой $AC$, нежели точка $B$, то $\angle DAB = 180° - \angle ABE = 117°$ (внутренние односторонние углы при прямых $AD$ и $BE$ и секущей $AB$). Из найденных двух значений (63° и 117°) наименьшее значение равно 63°.

**3.** Жора задумал три натуральных числа $a$, $b$, $c$. Чему могут равняться $a+b$, $b+c$ и $c+a$?
a) 102, 201, 300
b) 201, 302, 403,
c) 201, 303, 606,
d) 302, 305, 507,
e) 301, 403, 505.

**Ответ.** b) и d)

**Решение.** Пусть $a+b=x$, $b+c=y$ и $c+a=z$ (для определённости $x \leqslant y \leqslant z$). Сложим эти равенства: $(a+b)+(b+c)+(c+a)=x+y+z$, откуда $x+y+z=2(a+b+c)$ — чётное число (условие 1).

Далее заметим, что $a+b+c=\frac{1}{2}(x+y+z)$. Отсюда

$$a = a+b+c-(b+c) = \frac{1}{2}(x+y+z)-y = \frac{1}{2}(x-y+z).$$

Аналогично

$$b = \frac{1}{2}(x+y-z) \quad \text{и} \quad c = \frac{1}{2}(y+z-x).$$

Так как $a$ натуральное, то $\frac{1}{2}(x-y+z) > 0$, откуда $x+z > y$. Аналогично $x+y > z$ и $y+z > x$: т.е. заданные в условии задачи суммы должны соответствовать и такому условию — сумма любых двух из них больше третьей (условие 2).

Теперь можем найти ответ:
a) Не выполняется условие 1.
b) Подходит тройка $(151, 50, 252)$.
c) Не выполняется условие 2: $201+303 < 606$.
d) Подходит тройка $(252, 50, 255)$.
e) Не выполняется условие 1.

**4.** В турнире по боксу принимают участие 27 человек. Правила турнира таковы, что матч обязательно заканчивается победой одного из участников (т.е. ничьих не бывает). Турнир на выбывание: проигравший в каком-то поединке участник выбывает и больше не принимает участие в соревнованиях. По окончании турнира выяснилось, что $N$ участников провели на ринге не менее 4 матчей. При каком наибольшем $N$ такое возможно?

**Ответ.** 8.

**Решение.** Для начала докажем, что больше 8 таких участников быть не могло. Для начала вспомним, что если участников 27, то в турнире на вылет будет ровно 26 матчей: каждый матч выбывает ровно один участник, в начале их 27, а остаться должен ровно 1. Это значит, что побед у различных участников также было 26.

Если участник проводит на ринге не менее 4 матчей, то по крайней мере 3 из них он должен выиграть. Если бы таких участников было хотя бы 9, то всего побед было бы хотя бы 27, что неправда. Значит, участников, которые провели на ринге не менее 4 матчей, не более 8.

Теперь докажем, что 8 таких участников в турнире быть могло. Для этого достаточно привести один пример такого турнира. Пронумеруем всех участников от 1 до 27 и

- участник 1 обыгрывает участников 27, 26, 25 и проигрывает участнику 2;
- участник 2 обыгрывает участников 24, 23 (и 1) и проигрывает участнику 3;
- участник 3 обыгрывает участников 22, 21 (и 2) и проигрывает участнику 4;
- ...
- участник 7 обыгрывает участников 14, 13 (и 6) и проигрывает участнику 8;
- участник 8 обыгрывает участников 12, 11, 10, 9 (и 7).

**5.** Саша и Юра задумали по числу от 1 до 10, после чего Саша заявил: «Неважно, какое число ты задумал, в произведении наших чисел нет цифры 6», на что Юра ответил: «Тогда сумма наших чисел равна 14». Саша и Юра не ошибаются. Какое число задумал Юра?

**Ответ.** 9.

**Решение.** Докажем, что Саша задумал 5. Это число подходит, так как при умножении числа 5 на любое число от 1 до 10 результат не содержит цифры 6. Осталось для каждого остального числа показать, какое число мог задумать Юра, чтобы в произведении чисел Саши и Юры была цифра 6.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Если Саша задумал, | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| то Юра мог задумать | 6 | 3 | 2 | 4 | 1 | 9 | 2 | 4 | 6 |
| Тогда произведение | 6 | 6 | 6 | 16 | 6 | 63 | 16 | 36 | 60 |

Таким образом, Саша задумал 5. Тогда Юра задумал $14 - 5 = 9$.

**6.** Баба Яга готовит зелье. Рецепт подразумевает, что в зелье должны попасть:

- не более 5 лягушек (возможно, 0);
- чётное число волчьих зубов (возможно, 0);
- кратное шести число драконьих чешуек (возможно, 0);
- ровно 2025 ингредиентов.

Сколькими способами Баба Яга может приготовить зелье? Порядок добавления ингредиентов неважен.

**Ответ.** 1013.

**Решение.** Заметим, что всего ингредиентов — нечётное количество, а волчьих зубов и драконьих чешуек должно быть чётное количество. Значит, лягушек должно быть нечётное количество.

1 Если лягушка одна, то на волчьи зубы и драконьи чешуйки приходится 2024 слота. Заметим, что выбрав количество драконьих чешуек (их может быть от $0 \cdot 6$ до $337 \cdot 6 = 2022$ — 338 вариантов), остаток точно удастся заполнить волчьими зубами. Значит, в этом случае всего 338 вариантов.

3 Если лягушек три, то аналогично предыдущему, здесь всего 338 вариантов.

5 Если лягушек пять, то аналогично предыдущему, здесь всего 337 вариантов.

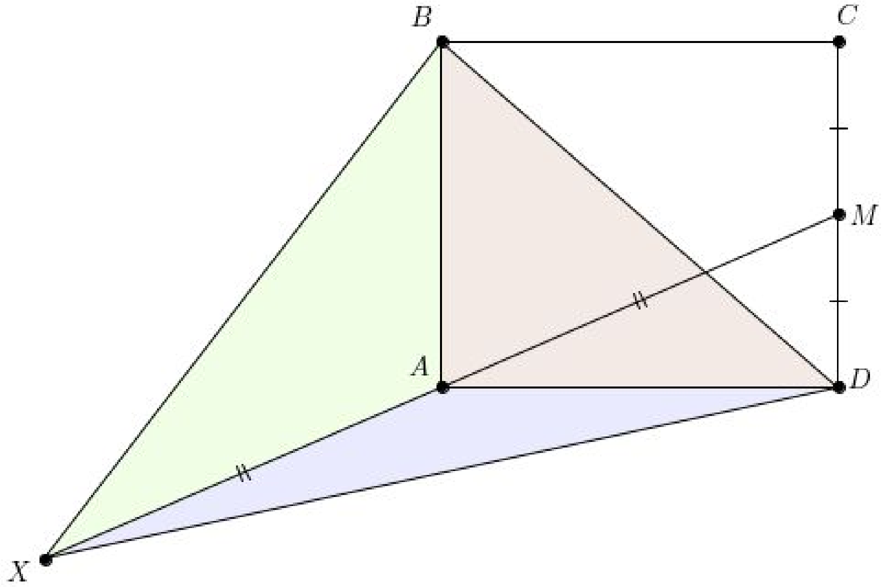
Итак, всего вариантов $338 + 338 + 337 = 1013$.

**7.** Длины сторон $AB$ и $AD$ прямоугольника $ABCD$ равны 20 и 23 соответственно. Пусть $M$ — середина стороны $CD$ и пусть $X$ — такая точка на плоскости, что $A$ — середина отрезка $XM$. Найдите площадь треугольника $XBD$.

**Ответ.** 575.

**Решение.** Будем пользоваться такими фактами.

1. Площадь треугольника, одна сторона которого совпадает со стороной прямоугольника, а ещё одна вершина лежит на противоположной стороне, равна половине площади прямоугольника. Если прямоугольник со сторонами $a$ и $b$, то его площадь равна $ab$, а площадь «вписанного» треугольника равна $\frac{1}{2}ab$.
2. Медиана делит треугольник на два треугольника равной площади. Действительно, середина стороны разбивает отрезок на две равные стороны в этих треугольниках, а опущенная на эти стороны высота одна и та же.




Пусть площадь $ABCD$ равна $S$. Тогда

$$S_{XAB} = S_{ABM} = \frac{1}{2}S,$$
$$S_{XAD} = S_{ADM} = \frac{1}{2}AD \cdot DM = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{1}{2}CD = \frac{1}{4}AD \cdot CD = \frac{1}{4}S,$$
$$S_{BAD} = \frac{1}{2}S.$$

Отсюда

$$S_{XBD} = S_{XAB} + S_{XAD} + S_{BAD} = \frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{2}S = \frac{5}{4}S.$$

Так как $S = 20 \cdot 23 = 460$, то $S_{XBD} = \frac{5}{4} \cdot 460 = 575$.

**8.** Простое число $p$ таково, что для любых целых чисел $a$ и $b$ числа $10a + 3b$ и $a + 8b$ или оба делятся на $p$, или оба не делятся. Найдите, чему может быть равно $p$.

**Ответ.** 7 или 11.

**Решение.** Решение будет опираться на такое наблюдение:

$$10 \cdot (a + 8b) - (10a + 3b) = 77b. \qquad (*)$$

Для начала докажем, что 7 и 11 подходят. Так как разность $10 \cdot (a + 8b)$ и $10a + 3b$ делится на 7 (см. $(*)$), то или эти оба числа делятся на 7, или оба не делятся. Так как 10 и 7 взаимно просты, то числа $10 \cdot (a + 8b)$ и $a + 8b$ или оба делятся на 7, или оба не делятся. Итак, $10a + 3b$ и $a + 8b$ или оба делятся на 7, или оба не делятся.

Теперь докажем, что ни одно другое $p$ не подходит. Для этого надо предъявить какие-то числа $a$ и $b$, что из чисел $10a + 3b$ и $a + 8b$ одно делится на $p$, а другое — нет. Равенство $(*)$ показывает, что лучше взять $b = 1$. Тогда в качестве $a$ подойдёт $p - 8$. Тогда $10a + 3b = 10p - 77$ — не делится на $p$ (т.к. $p$ это не 7 и не 11), $a + 8b = p$ — делится на $p$.