

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 8

Задание 1. Вариант 1. Винни-Пух и Пятачок решили сделать грядку и посадить на ней картофель и морковь. Всего они выкопали 105 лунок в ряд. В каждую вторую лунку Винни-Пух бросил клубень картофеля, а в каждую третью лунку Пятачок бросил семена моркови. Первый клубень попал во вторую лунку, первое семечко — в третью. Сколько оказалось лунок, в которые попали и клубень картофеля, и семена моркови?

Ответ: 17

Решение.

Пронумеруем лунки на грядке. Из условия следует, что картофель находится в лунках с чётными номерами: 2, 4, 6, 8, ..., 104, а семена моркови — в лунках с номерами, кратными трём: 3, 6, 9, 12, ..., 105.

Чтобы в лунке оказались морковь и картофель, её номер должен быть чётным и одновременно делиться на 3, получаем следующие номера: 6, 12, 18, ..., 102, т.е. каждая шестая лунка. Так как $102 = 6 \cdot 17$, всего таких лунок будет 17.

Задание 1. Вариант 2. Винни-Пух и Пятачок решили сделать грядку и посадить на ней картофель и морковь. Всего они выкопали 109 лунок в ряд. В каждую вторую лунку Винни-Пух бросил клубень картофеля, а в каждую третью лунку Пятачок бросил семена моркови. Первый клубень попал во вторую лунку, первое семечко — в третью. Сколько оказалось лунок, в которые попали и клубень картофеля, и семена моркови?

Ответ: 18

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 3. Винни-Пух и Пятачок решили сделать грядку и посадить на ней картофель и морковь. Всего они выкопали 117 лунок в ряд. В каждую вторую лунку Винни-Пух бросил клубень картофеля, а в каждую третью лунку Пятачок бросил семена моркови. Первый клубень попал во вторую лунку, первое семечко — в третью. Сколько оказалось лунок, в которые попали и клубень картофеля, и семена моркови?

Ответ: 19

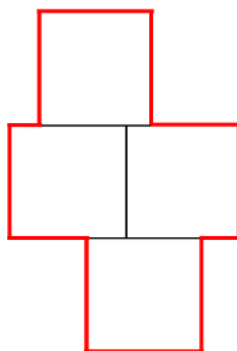
Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 4. Винни-Пух и Пятачок решили сделать грядку и посадить на ней картофель и морковь. Всего они выкопали 125 лунок в ряд. В каждую вторую лунку Винни-Пух бросил клубень картофеля, а в каждую третью лунку Пятачок бросил семена моркови. Первый клубень попал во вторую лунку, первое семечко — в третью. Сколько оказалось лунок, в которые попали и клубень картофеля, и семена моркови?

Ответ: 20

Решение по аналогии с вариантом 1

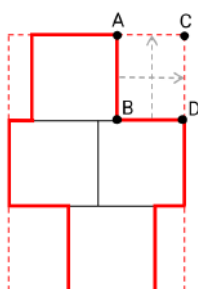
Задание 2. Вариант 1. Найдите периметр фигуры, выделенной красным цветом, если сторона каждого, входящего в неё квадрата равна 5 см. Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 50

Решение.

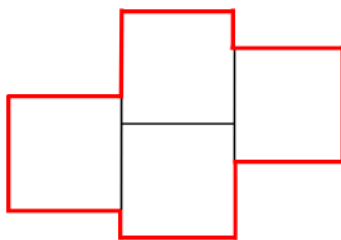
Заметим, что красные границы исходной фигуры можно передвинуть так, что получится прямоугольник 2×3 с таким же периметром:



На рисунке граница AB перейдёт в CD , а BD перейдёт в AC . Аналогично с остальными границами.

Периметр полученного прямоугольника равен $(2 \cdot 5 + 3 \cdot 5) \cdot 2 = 50$ см.

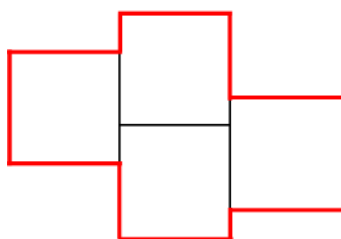
Задание 2. Вариант 2. Найдите периметр фигуры, выделенной красным цветом, если сторона каждого, входящего в неё квадрата равна 6 см. Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 60

Решение по аналогии с вариантом 1

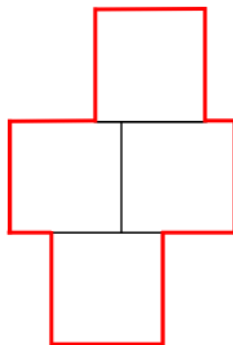
Задание 2. Вариант 3. Найдите периметр фигуры, выделенной красным цветом, если сторона каждого, входящего в неё квадрата равна 7 см. Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 70

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 4. Найдите периметр фигуры, выделенной красным цветом, если сторона каждого, входящего в неё квадрата равна 8 см. Ответ выразите в сантиметрах.



Ответ: 80

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 1. Пять внушек — Аня, Белла, Валя, Галя и Даша — собрались провести свою бабушку. Известно, что Аня пришла позже Беллы, а Валя пришла раньше, чем Галя и Даша. Кто из внушек пришёл к бабушке первой, если это была не Валя?

Ответ:

- Аня
- ✓ Белла
- Валя
- Галя
- Даша

Решение.

Определим, кто из внушек точно не мог прийти первой. Аня пришла позже Беллы, поэтому она не первая. Галя и Даша пришли позже Вали, поэтому они тоже не первые. По условию Валя не могла быть первой, значит, первой могла быть только Белла.

Замечание. Такая возможность существует, например, первой пришла Белла, второй — Валя, третьей — Аня, а последними — Галя и Даша.

Задание 3. Вариант 2. Пять внушек — Аня, Белла, Валя, Галя и Даша — собрались провести свою бабушку. Известно, что Белла пришла позже Вали, а Галя пришла раньше, чем Даша и Аня. Кто из внушек пришёл к бабушке первой, если это была не Галя?

Ответ:

- Аня
- Белла
- ✓ Валя
- Галя
- Даша

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 3. Пять внушек — Аня, Белла, Валя, Галя и Даша — собрались провести свою бабушку. Известно, что Валя пришла позже Гали, а Даша пришла раньше, чем Аня и Белла. Кто из внушек пришёл к бабушке первой, если это была не Даша?

Ответ:

- Аня
- Белла
- Валя
- ✓ Галя
- Даша

Решение по аналогии с вариантом 1

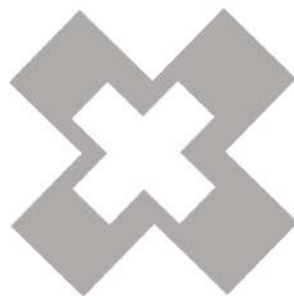
Задание 3. Вариант 4. Пять внушек — Аня, Белла, Валя, Галя и Даша — собрались провести свою бабушку. Известно, что Галя пришла позже Даши, а Аня пришла раньше, чем Белла и Валя. Кто из внушек пришёл к бабушке первой, если это была не Аня?

Ответ:

- Аня
- Белла
- Валя
- Галя
- ✓ Даша

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 1. Из серой фигуры, состоящей из 5 одинаковых квадратов вырезали фигуру, состоящую также из 5 одинаковых квадратов, причём сторона квадрата вырезанной фигуры вдвое меньше стороны квадрата серой фигуры.



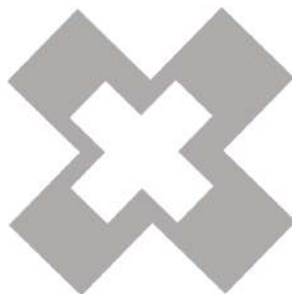
Найдите площадь оставшейся части серой фигуры, если площадь вырезанной равна 46.

Ответ: 138

Решение.

Сопоставим каждый из пяти серых квадратов с одним из вырезанных (белых) квадратов. Это можно сделать так: мысленно разрежем белый «крестик» на 5 квадратов и каждый из них переместим в соответствующий ему серый. Тогда получается, что из каждого серого квадрата вырезали ровно $1/4$ часть и $3/4$ части осталось. Значит, площадь вырезанной части в 3 раза меньше, чем площадь оставшейся. Следовательно, площадь оставшейся серой части равна $3 \cdot 46 = 138$.

Задание 4. Вариант 2. Из серой фигуры, состоящей из 5 одинаковых квадратов вырезали фигуру, состоящую также из 5 одинаковых квадратов, причём сторона квадрата вырезанной фигуры вдвое меньше стороны квадрата серой фигуры.

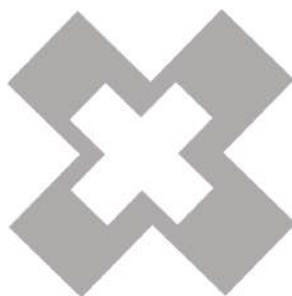


Найдите площадь оставшейся части серой фигуры, если площадь вырезанной равна 49.

Ответ: 147

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 3. Из серой фигуры, состоящей из 5 одинаковых квадратов вырезали фигуру, состоящую также из 5 одинаковых квадратов, причём сторона квадрата вырезанной фигуры вдвое меньше стороны квадрата серой фигуры.

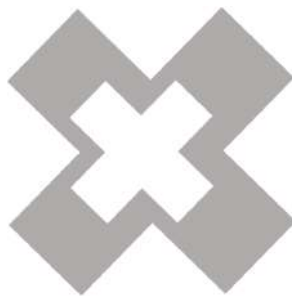


Найдите площадь оставшейся части серой фигуры, если площадь вырезанной равна 52.

Ответ: 156

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 4. Из серой фигуры, состоящей из 5 одинаковых квадратов вырезали фигуру, состоящую также из 5 одинаковых квадратов, причём сторона квадрата вырезанной фигуры вдвое меньше стороны квадрата серой фигуры.



Найдите площадь оставшейся части серой фигуры, если площадь вырезанной равна 51.

Ответ: 153

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 1. В чёрном пакете лежат 4 красных, 3 синих и 5 жёлтых носков. Коля знает, что ровно три из них дырявые. Какое наименьшее число носков должен достать Коля не глядя, чтобы среди них наверняка нашлись два не дырявых носка одного цвета?

Ответ: 7

Решение.

Заметим, что если взять 6 носков, то может оказаться, что взято по два носка каждого цвета и среди них 3 дырявых, причём все дырявые разных цветов. Тогда мы не сможем выбрать два не дырявых носка одного цвета.

Теперь докажем, что если взять 7 носков, то среди них обязательно окажется нужная пара. Предположим, что это не так. Тогда не дырявых носков каждого цвета не более одного. Тогда всего не дырявых носков не более 3. С учётом того, что дырявых может быть взято не более 3, всего взято носков не более 6. Противоречие.

Задание 5. Вариант 2. В чёрном пакете лежат 5 красных, 3 синих и 4 жёлтых носка. Коля знает, что ровно три из них дырявые. Какое наименьшее число носков должен достать Коля не глядя, чтобы среди них наверняка нашлись три не дырявых носка одного цвета?

Ответ: 10

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 3. В чёрном пакете лежат 4 красных, 5 синих и 6 жёлтых носков. Коля знает, что ровно два из них дырявые. Какое наименьшее число носков должен достать Коля не глядя, чтобы среди них наверняка нашлись три не дырявых носка одного цвета?

Ответ: 9

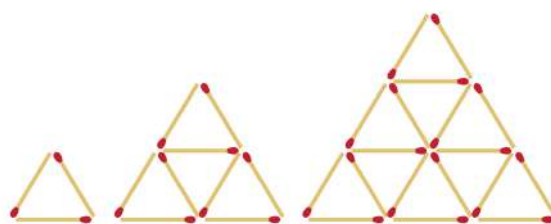
Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 4. В чёрном пакете лежат 5 красных, 4 синих и 6 жёлтых носков. Коля знает, что ровно четыре из них дырявые. Какое наименьшее число носков должен достать Коля не глядя, чтобы среди них наверняка нашлись два не дырявых носка одного цвета?

Ответ: 8

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 1. Маша создала последовательность треугольников из спичек, используя схему, показанную на рисунке.

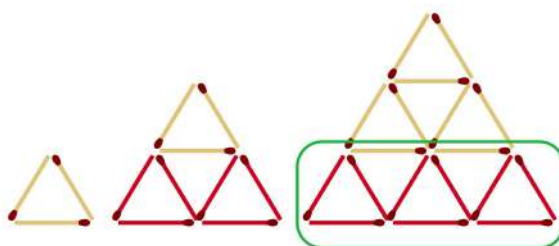


На один из треугольников ушло 135 спичек. Из скольких спичек состоит одна сторона этого треугольника?

Ответ: 9

Решение.

Рассмотрим нижнюю строку в треугольнике, пусть в ней k спичек. Выделим k треугольников (назовём их *единичными*), для которых спички, лежащие в основании, являются стороной. Например, для треугольника со стороной 3 мы выделим 3 красных единичных треугольника:



Если эти треугольники убрать, то получится треугольник, сторона которого содержит $k - 1$ спичку.

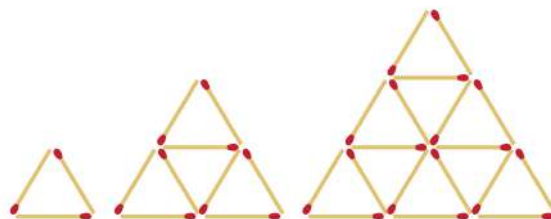
Аналогично уберём теперь у полученного треугольника нижний ряд единичных треугольников, получив треугольник, сторона которого содержит $k - 2$ спички. Прodelывая эту операцию, в конце концов получим треугольник со стороной в одну спичку.

Понятно, что количество единичных треугольников равно $1 + 2 + \dots + k$. Тогда количество спичек в треугольнике со стороной в k спичек равно $3 \cdot (1 + 2 + \dots + k)$.

Имеем следующее равенство: $3 \cdot (1 + 2 + \dots + k) = 135$, что равносильно $1 + 2 + 3 + \dots + k = 45$.

Таким образом, нужно складывать последовательные натуральные числа до тех пор, пока не получится 45. Это произойдёт при $k = 9$, при этом ответ единственный, так как все меньшие суммы будут меньше 45, а все большие — больше.

Задание 6. Вариант 2. Маша создала последовательность треугольников из спичек, используя схему, показанную на рисунке.

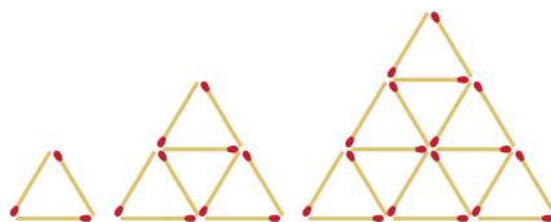


На один из треугольников ушло 165 спичек. Из скольких спичек состоит одна сторона этого треугольника?

Ответ: 10

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 3. Маша создала последовательность треугольников из спичек, используя схему, показанную на рисунке.

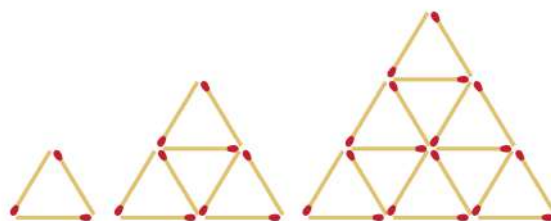


На один из треугольников ушло 198 спичек. Из скольких спичек состоит одна сторона этого треугольника?

Ответ: 11

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 4. Маша создала последовательность треугольников из спичек, используя схему, показанную на рисунке.



На один из треугольников ушло 234 спички. Из скольких спичек состоит одна сторона этого треугольника?

Ответ: 12

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 1. Известно, что из клетчатого прямоугольника $10 \times n$ можно по линиям сетки вырезать вертикальный или горизонтальный прямоугольник 1×2 ровно 275 способами. Чему равно n ?

Ответ: 15

Решение.

Расположим прямоугольник так, чтобы у него было 10 столбцов и n строк. При вырезании прямоугольника 1×2 его можно расположить вертикально или горизонтально.

1. Если его расположить горизонтально, то для каждой строки существует 9 способов расположения. Так как строк n , всего способов $9n$.

2. Если прямоугольник 1×2 расположить вертикально, то для каждого столбца существует $n - 1$ способ его расположения. Так как столбцов 10, всего способов $10(n - 1)$.

Таким образом, количество способов вырезать прямоугольник 1×2 будет равно $9n + 10(n - 1) = 19n - 10$. По условию $19n - 10 = 275$, тогда $n = 15$.

Задание 7. Вариант 2. Известно, что из клетчатого прямоугольника $10 \times n$ можно по линиям сетки вырезать вертикальный или горизонтальный прямоугольник 1×2 ровно 294 способами. Чему равно n ?

Ответ: 16

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 3. Известно, что из клетчатого прямоугольника $10 \times n$ можно по линиям сетки вырезать вертикальный или горизонтальный прямоугольник 1×2 ровно 313 способами. Чему равно n ?

Ответ: 17

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 4. Известно, что из клетчатого прямоугольника $10 \times n$ можно по линиям сетки вырезать вертикальный или горизонтальный прямоугольник 1×2 ровно 256 способами. Чему равно n ?

Ответ: 14

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 1. Петя заполнил таблицу 4×5 (4 строки и 5 столбцов) числами от 1 до 5, так, что в каждой строке все числа оказались различными и в каждом столбце все числа оказались различными. Затем он сложил все числа в первом и последнем столбцах. Какие из данных чисел он наверняка **НЕ** сможет получить?

Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- ✓ 20
- 21
- 23
- 25
- 26

Решение.

Наименьшей суммой различных чисел в столбце может быть $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, а наибольшей — $2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

Докажем, что в первом и последнем столбцах не могут быть одновременно две наименьшие и две наибольшие суммы.

Если в первом и последнем столбцах будут наименьшие суммы, то в этих столбцах нет числа 5. Заметим, что в каждой строке каждое число должно встретиться ровно по одному разу. Это следует из того, что столбцов 5 и чисел тоже 5, значит, в таблице число 5 должно быть записано ровно 4 раза. Тогда во втором, третьем или четвёртом столбцах число 5 встретится хотя бы два раза. Противоречие.

Аналогично если в первом и последнем столбцах наибольшие суммы, то в них нет числа 1. Тогда число 1 должно встретиться четыре раза в столбцах со второго по четвёртый. Значит, в каком-то столбце число 1 встретится хотя бы два раза. Снова противоречие.

Покажем, как получить все остальные суммы S от 21 до 27.

Для $S = 21$ можно составить следующую таблицу:

1	2	4	3	5
2	5	1	4	3
3	4	5	1	2
4	3	2	5	1
10	14	12	13	11

Здесь в последней строке указана сумма чисел в столбце.

Заметим, что перестановка столбцов не нарушает условие задачи. Тогда, взяв указанную выше таблицу в качестве исходной, перестановкой столбцов можно получить любую сумму в диапазоне от $10 + 11$ до $13 + 14$.

Задание 8. Вариант 2. Петя заполнил таблицу 4×5 (4 строки и 5 столбцов) числами от 1 до 5, так, что в каждой строке все числа оказались различными и в каждом столбце все числа оказались различными. Затем он сложил все числа в первом и последнем столбцах. Какие из данных чисел он наверняка **НЕ** сможет получить?

Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- 22
- 23
- 26
- 27
- ✓ 28

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 3. Петя заполнил таблицу 4×5 (4 строки и 5 столбцов) числами от 1 до 5, так, что в каждой строке все числа оказались различными и в каждом столбце все числа оказались различными. Затем он сложил все числа в первом и последнем столбцах. Какие из данных чисел он наверняка **НЕ** сможет получить?

Ответ:

- ✓ 20

- 22
- 23
- 25
- 27

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 4. Петя заполнил таблицу 4×5 (4 строки и 5 столбцов) числами от 1 до 5, так, что в каждой строке все числа оказались различными и в каждом столбце все числа оказались различными. Затем он сложил все числа в первом и последнем столбцах. Какие из данных чисел он наверняка **НЕ** сможет получить?

Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- 21
- 22
- 24
- 26
- ✓ 28

Решение по аналогии с вариантом 1