

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 8

Задание 1. Вариант 1. Гриша вышел из дома в школу со скоростью 80 метров в минуту. После того как он прошёл половину пути до школы, он понял, что если продолжит идти с такой же скоростью, то опоздает на 1 минуту. Поэтому он ускорился до 100 метров в минуту и в итоге пришёл за 1 минуту до начала урока. Найдите расстояние между домом Гриши и школой. Ответ выразите в метрах.

Ответ: 1600.

Решение.

Обозначим через S половину расстояния от дома до школы (в метрах), а через t — время, оставшееся до начала урока после того, как Гриша прошёл половину пути (в минутах). Тогда из первого условия мы получаем $S = 80(t + 1)$, а из второго — $S = 100(t - 1)$. Приравняем эти два равенства и преобразуем:

$$80(t + 1) = 100(t - 1)$$

$$80t + 80 = 100t - 100$$

$$180 = 20t;$$

$$t = 9.$$

Таким образом, половина пути составляет $S = 80(t + 1) = 80(9 + 1) = 800$ метров, а весь путь — 1600 метров.

Задание 1. Вариант 2. Гриша вышел из дома в школу со скоростью 100 метров в минуту. После того как он прошёл половину пути до школы, он понял, что если продолжит идти с такой же скоростью, то опоздает на 1 минуту. Поэтому он ускорился до 125 метров в минуту и в итоге пришёл за 1 минуту до начала урока. Найдите расстояние между домом Гриши и школой. Ответ выразите в метрах.

Ответ: 2000.

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 1. После матча между командой лжецов (всегда лгут) и командой правдолюбков (всегда говорят правду) двух представителей разных команд, A и B , спросили: «Как закончился матч?». Состоялся такой диалог:

A : Матч закончился вничью.

B : Нет, мы победили с перевесом в два мяча.

A : Всего в матче было забито 9 мячей.

B : Нет, в матче было забито 10 мячей.

Кто же выиграл и с каким счётом? Заполните пропуски в табло.

Ответ:

«Лжецы»	«Правдолюбцы»
4	6

Решение.

Предположим, что команда A — правдолюбцы. Тогда матч закончился вничью и суммарно было забито 9 мячей. Но тогда каждая команда забила по $\frac{9}{2} = 4.5$ мяча — нецелое число. Противоречие.

Следовательно, команда B — правдолюбцы. Тогда B забила на 2 мяча больше, чем A ; также суммарно было забито 10 мячей. Обозначим через a количество мячей, забитых командой A , а через b — командой B . Тогда $a + b = 10$ и $b - a = 2$. Сложив равенства, получаем $2b = 12$, откуда $b = 6$. Далее находим $a = b - 2 = 6 - 2 = 4$.

Задание 2. Вариант 2. После матча между командой лжецов (всегда лгут) и командой правдолюбков (всегда говорят правду) двух представителей разных команд, A и B , спросили: «Как закончился матч?». Состоялся такой диалог:

A : Матч закончился вничью.

B : Нет, мы победили с перевесом в два мяча.

A : Всего в матче было забито 11 мячей.

B : Нет, в матче было забито 12 мячей.

Кто же выиграл и с каким счётом? Заполните пропуски в табло.

Ответ:

«Лжецы»	«Правдолюбцы»
5	7

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 3. После матча между командой лжецов (всегда лгут) и командой правдолюбков (всегда говорят правду) двух представителей разных команд, *A* и *B*, спросили: «Как закончился матч?». Состоялся такой диалог:

A: Матч закончился вничью.

B: Нет, мы победили с перевесом в два мяча.

A: Всего в матче было забито 13 мячей.

B: Нет, в матче было забито 14 мячей.

Кто же выиграл и с каким счётом? Заполните пропуски в табло.

Ответ:

«Лжецы»	«Правдолюбцы»
6	8

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 4. После матча между командой лжецов (всегда лгут) и командой правдолюбков (всегда говорят правду) двух представителей разных команд, *A* и *B*, спросили: «Как закончился матч?». Состоялся такой диалог:

A: Матч закончился вничью.

B: Нет, мы победили с перевесом в два мяча.

A: Всего в матче было забито 15 мячей.

B: Нет, в матче было забито 16 мячей.

Кто же выиграл и с каким счётом? Заполните пропуски в табло.

Ответ:

«Лжецы»	«Правдолюбцы»
7	9

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 1. Полина загадала трёхзначное число. Потом она заметила, что если умножить это число на произведение всех его цифр, то получится 2877. Какое трёхзначное число могла задумать Полина? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

✓137

Решение.

Разложим число 2877 на простые множители: $2877 = 3 \cdot 7 \cdot 137$. Заметим, что задуманное число является делителем числа 2877. Найдём все трёхзначные делители числа 2877: это 137, $137 \cdot 3 = 411$ и $137 \cdot 7 = 959$. Нетрудно видеть, что из приведённых чисел подходит только 137.

Задание 3. Вариант 2. Полина загадала трёхзначное число. Потом она заметила, что если умножить это число на произведение всех его цифр, то получится 1778. Какое трёхзначное число могла задумать Полина? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

✓127

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 3. Полина загадала трёхзначное число. Потом она заметила, что если умножить это число на произведение всех его цифр, то получится 5495. Какое трёхзначное число могла задумать Полина? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

✓157

Решение по аналогии с вариантом 1

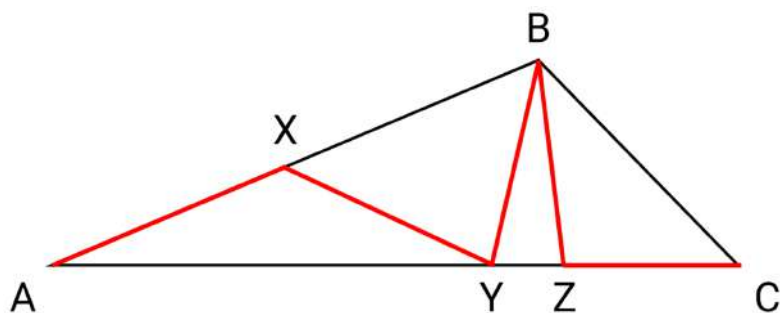
Задание 3. Вариант 4. Полина загадала трёхзначное число. Потом она заметила, что если умножить это число на произведение всех его цифр, то получится 3633. Какое трёхзначное число могла задумать Полина? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

✓173

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 1. На сторонах треугольника *ABC* взяли точки *X*, *Y* и *Z* так, что все звенья ломаной *AXYBZC* оказались равны.



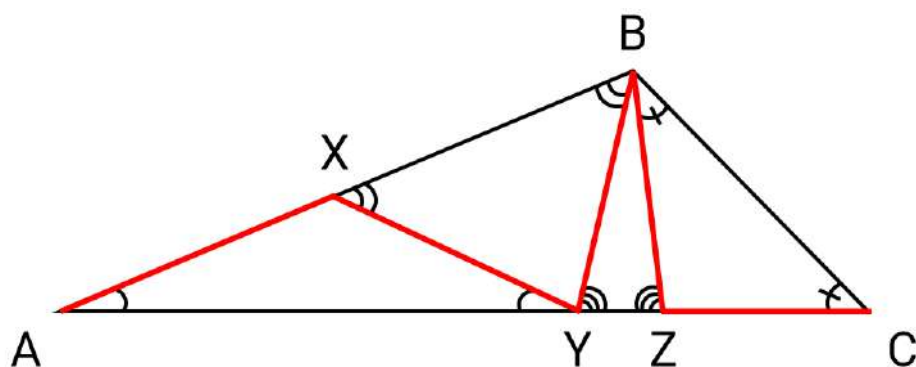
Чему равен угол A треугольника ABC , если угол B равен 110° ? Ответ выразите в градусах.

Ответ: 28

Решение. Обозначим угол BAC через α . Поскольку треугольник AXY равнобедренный, $\angle AXY = \alpha$, и по теореме о внешнем угле треугольника находим, что $\angle BXY = 2\alpha$.

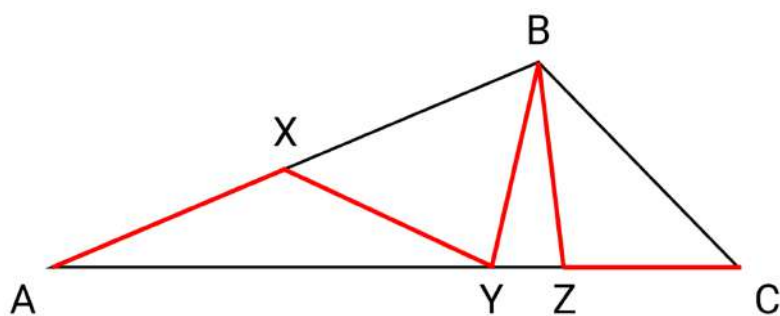
Поскольку треугольник BXY равнобедренный, получаем $\angle XBY = \angle BXY = 2\alpha$. И, применяя вышеуказанную теорему, приходим к $\angle BYZ = 3\alpha$.

Поскольку BYZ тоже равнобедренный, получим что $\angle BZY = 3\alpha$. Применяя теорему о внешнем угле для равнобедренного треугольника BZC получим, что $\angle BCA = \frac{1}{2}\angle BZY = \frac{3}{2}\alpha$.



Применяя теорему о сумме углов для треугольника ABC получим, что $180^\circ = \alpha + \angle B + \frac{3}{2}\alpha$, откуда следует, что $\alpha = \frac{2}{5}(180^\circ - \angle B) = \frac{2}{5}(180^\circ - 110^\circ) = 28^\circ$.

Задание 4. Вариант 2. На сторонах треугольника ABC взяли точки X , Y и Z так, что все звенья ломаной $AXYBZC$ оказались равны.

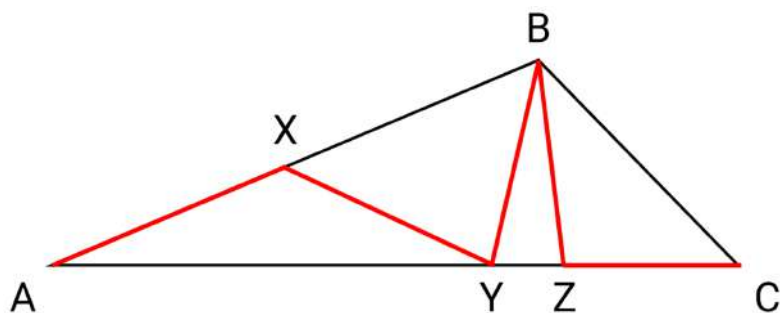


Чему равен угол A треугольника ABC , если угол B равен 115° ? Ответ выразите в градусах.

Ответ: 26

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 3. На сторонах треугольника ABC взяли точки X , Y и Z так, что все звенья ломаной $AXYBZC$ оказались равны.

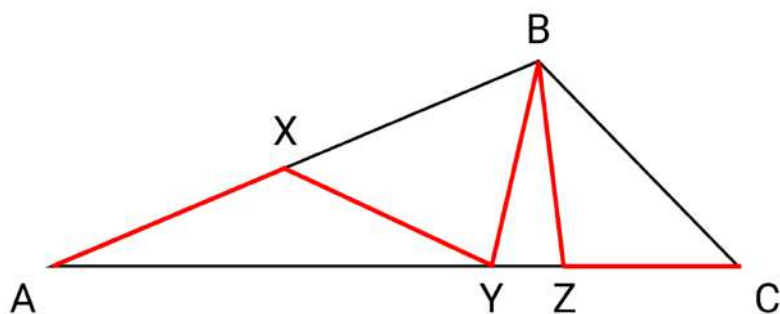


Чему равен угол A треугольника ABC , если угол B равен 125° ? Ответ выразите в градусах.

Ответ: 22

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 4. На сторонах треугольника ABC взяли точки X , Y и Z так, что все звенья ломаной $AXYBZC$ оказались равны.



Чему равен угол A треугольника ABC , если угол B равен 130° ? Ответ выразите в градусах.

Ответ: 20

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 1. Толя загадал натуральное число n и выписал на доску все натуральные числа от 1 до n . Затем он попытался сложить все выписанные числа и получил число 880, однако выяснилось, что ровно одно из выписанных чисел он случайно добавил дважды. Чему могло равняться n ? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

✓41

Решение.

Обозначим через k число, подсчитанное дважды. Тогда найденная Толей сумма равняется

$$S = 1 + \dots + (k-1) + k + k + (k+1) + \dots + n = k + 1 + 2 + \dots + n = k + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Оценим эту сумму: так как $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 \leq S = 880 \leq \frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Нетрудно видеть, что такому неравенству удовлетворяет только число $n = 41$. В самом деле, при $n \geq 42$ имеем $880 > \frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{42 \cdot 43}{2} = 903$, а при $n \leq 40$ имеем $880 \leq \frac{n(n+1)}{2} + n \leq \frac{40 \cdot 41}{2} + 40 = 860$. Само значение $n = 41$ подходит: при $k = 19$ имеем $S = \frac{41 \cdot 42}{2} + 19 = 800$.

Задание 5. Вариант 2. Толя загадал натуральное число n и выписал на доску все натуральные числа от 1 до n . Затем он попытался сложить все выписанные числа и получил число 920, однако выяснилось, что ровно одно из выписанных чисел он случайно добавил дважды. Чему могло равняться n ? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

✓42

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 3. Толя загадал натуральное число n и выписал на доску все натуральные числа от 1 до n . Затем он попытался сложить все выписанные числа и получил число 960, однако выяснилось, что ровно одно из выписанных чисел он случайно добавил дважды. Чему могло равняться n ? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

✓43

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 1. У Василисы есть красные и белые кубики, причём красных на 2 больше, чем белых. Василиса сложила из всех кубиков большой куб без дырок и внутренних полостей, полностью красный снаружи. Какое наименьшее количество красных кубиков у неё могло быть?

Ответ: 501**Решение.**

Так как красных кубиков на 2 больше, чем белых, суммарное количество кубиков чётно. Следовательно, сторона большого кубика содержит чётное количество кубиков. Обозначим это количество через n . Тогда всего кубиков n^3 . Заметим, что все белые кубики не могут примыкать к границе, а потому содержатся во внутреннем кубе со стороной $n - 2$. Поэтому число белых кубиков не более $(n - 2)^3$, а красных — не менее $n^3 - (n - 2)^3$. Отсюда получаем неравенство $n^3 - (n - 2)^3 \leq (n - 2)^3 + 2$, или $n^3 - 2 \leq 2(n - 2)^3$. Вспомним, что n чётно. Найдём первое n , удовлетворяющее этому неравенству:

$$n = 2 : 2^3 - 2 \leq 2 \cdot 0^3; 6 \leq 0 \text{ — неверно.}$$

$$n = 4 : 4^3 - 2 \leq 2 \cdot 2^3; 62 \leq 16 \text{ — неверно.}$$

$$n = 6 : 6^3 - 2 \leq 2 \cdot 4^3; 214 \leq 128 \text{ — неверно.}$$

$$n = 8 : 8^3 - 2 \leq 2 \cdot 6^3; 510 \leq 432 \text{ — неверно.}$$

$$n = 10 : 10^3 - 2 \leq 2 \cdot 8^3; 998 \leq 1024 \text{ — верно.}$$

При $n = 10$ число красных кубиков равно $\frac{10^3 + 2}{2} = 501$, а число белых кубиков — $\frac{10^3 - 2}{2} = 499$. Нетрудно видеть, что требуемую конструкцию сложить можно: Василисе достаточно сначала собрать красную границу из $10^3 - 8^3 = 488 < 501$ кубиков, а оставшиеся белые и красные кубики расположить внутри в любом порядке.

Задание 6. Вариант 2. У Василисы есть красные и белые кубики, причём красных на 4 больше, чем белых. Василиса сложила из всех кубиков большой куб без дырок и внутренних полостей, полностью красный снаружи. Какое наименьшее количество красных кубиков у неё могло быть?

Ответ: 502**Решение по аналогии с вариантом 1**

Задание 6. Вариант 3. У Василисы есть красные и белые кубики, причём красных на 6 больше, чем белых. Василиса сложила из всех кубиков большой куб без дырок и внутренних полостей, полностью красный снаружи. Какое наименьшее количество красных кубиков у неё могло быть?

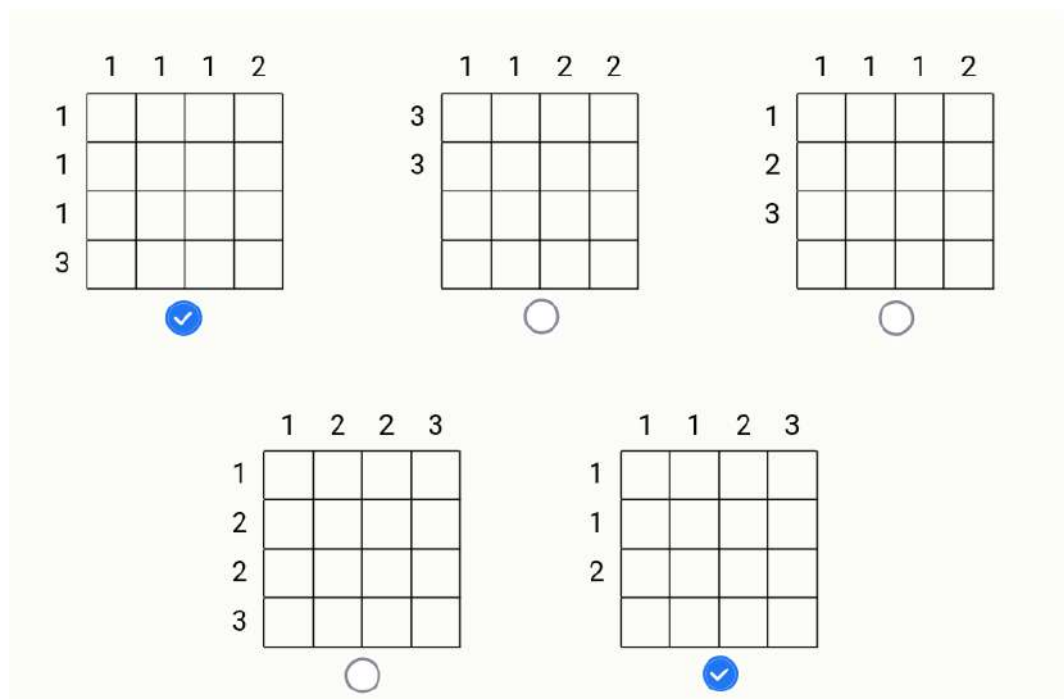
Ответ: 503**Решение по аналогии с вариантом 1**

Задание 6. Вариант 4. У Василисы есть красные и белые кубики, причём красных на 2 меньше, чем белых. Василиса сложила из всех кубиков большой куб без дырок и внутренних полостей, полностью красный снаружи. Какое наименьшее количество красных кубиков у неё могло быть?

Ответ: 499**Решение по аналогии с вариантом 1**

Задание 7. Вариант 1. В клетках таблицы 4×4 расставили числа 1, 2 и 3. После этого слева от тех строк и сверху от тех столбцов, более чем в половине клеток которых встречается одно и то же число, записали это число. Затем все числа в таблице стёрли. Какие картинки могли получиться? Выберите все подходящие варианты:

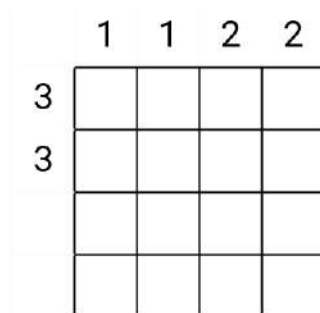
Ответ:



Решение.

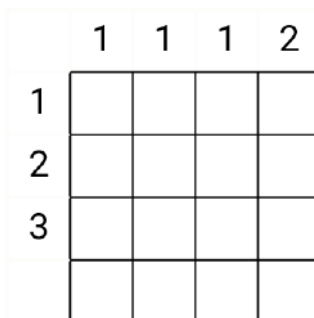
Для отмеченных фигур подходящие расположения приведены на рисунке. Докажем, что для остальных фигур подходящих расположений не существует.

Рассмотрим фигуру:



Раз над первыми двумя столбцами написали 1, то в каждом из них хотя бы по 3 единицы. Значит, всего в таблице хотя бы 6 единиц и, следуя той же логике, хотя бы 6 двоек. Для троек выполним аналогичное рассуждение, но по строкам. Таким образом, в таблице хотя бы 6 единиц, хотя бы 6 двоек и хотя бы 6 троек. Значит, в таблице должно быть хотя бы 18 клеток, а всего их 16, противоречие.

Рассмотрим фигуру:



По аналогичным соображениям, в ней хотя бы 9 единиц и хотя бы 3 тройки. Докажем, что двоек не менее 5. Действительно, в четвёртом столбце должно быть хотя бы 3 двойки. Во второй строке тоже должно быть хотя бы 3 двойки, причём не более одной из них в четвёртом столбце, а значит, в оставшейся части таблицы двоек не менее двух. Значит, всего двоек действительно не менее 5. Значит, всего в таблице не менее $9+3+5 = 17$ клеток, противоречие.

Рассмотрим фигуру:

	1	2	2	3
1				
2				
2				
3				

По рассуждениям из предыдущего пункта, в ней не менее 5 единиц и не менее 5 троек. Докажем, что двоек не менее 8. Действительно, во второй и третьей строках находится хотя бы по 3 двойки. Кроме того, во втором и в третьем столбцах тоже хотя бы по три двойки, из которых хотя бы по одной находятся вне второй и третьей строк. Значит, всего двоек не менее $3 + 3 + 1 + 1 = 8$. Таким образом, в таблице не менее $5 + 5 + 8 = 18$ клеток, противоречие. Значит, могли получиться только отмеченные галочкой картинки.

Пример расстановок для отмеченных галочкой таблиц:

	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
3	3	3	3	1

	1	1	2	3
1	1	1	1	3
1	1	1	2	1
2	2	2	2	3
	1	1	2	3

Задание 7. Вариант 2. В клетках таблицы 4×4 расставили числа 1, 2 и 3. После этого слева от тех строк и сверху от тех столбцов, более чем в половине клеток которых встречается одно и то же число, записали это число. Затем все числа в таблице стёрли. Какие картинки **НЕ** могли получиться? Выберите все подходящие варианты:

Ответ:

	1	1	1	2
1				
1				
1				
3				

☐

	1	1	2	2
3				
3				

☒

	1	1	1	2
1				
2				
3				

☒

	1	2	2	3
1				
2				
2				
3				

☒

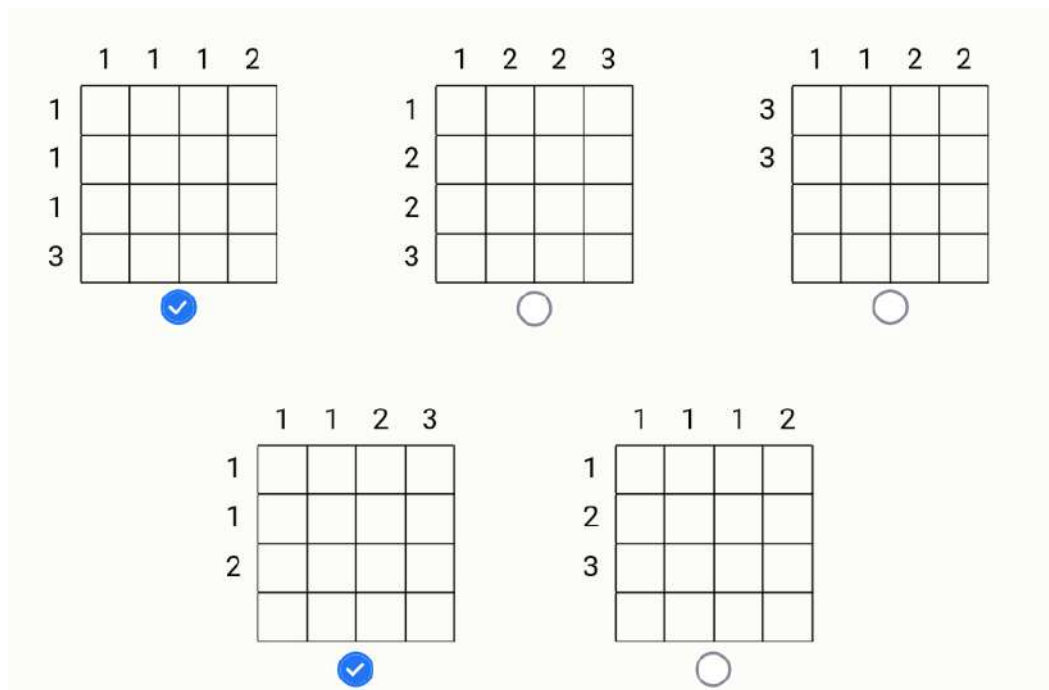
	1	1	2	3
1				
1				
2				

☐

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 3. В клетках таблицы 4×4 расставили числа 1, 2 и 3. После этого слева от тех строк и сверху от тех столбцов, более чем в половине клеток которых встречается одно и то же число, записали это число. Затем все числа в таблице стёрли. Какие картинки могли получиться? Выберите все подходящие варианты:

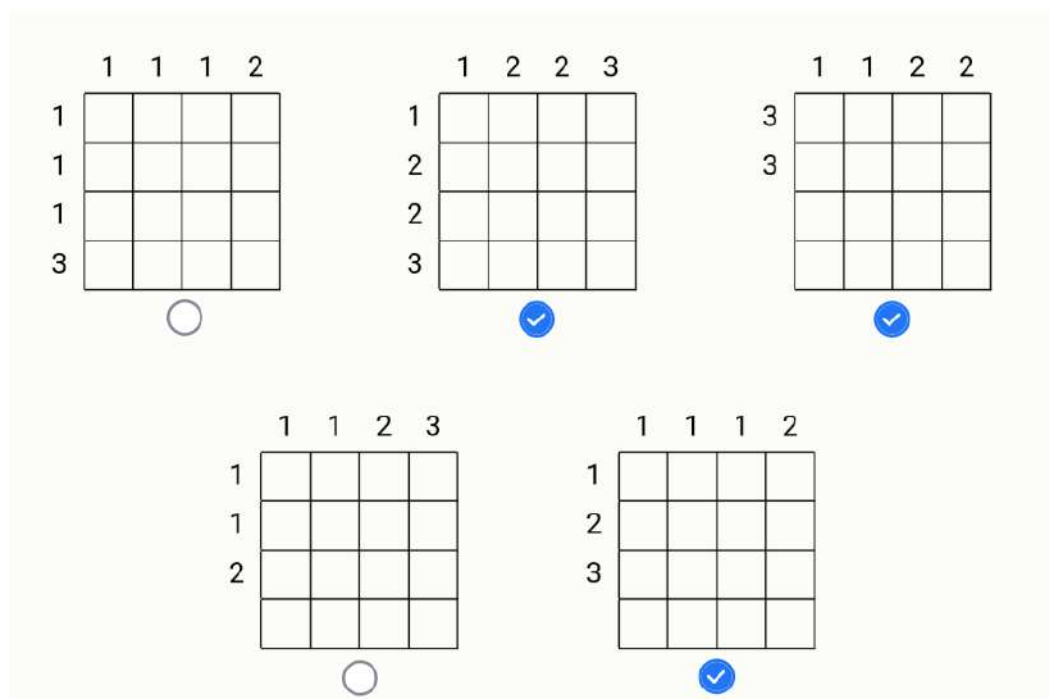
Ответ:



Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 4. В клетках таблицы 4×4 расставили числа 1, 2 и 3. После этого слева от тех строк и сверху от тех столбцов, более чем в половине клеток которых встречается одно и то же число, записали это число. Затем все числа в таблице стёрли. Какие картинки **НЕ** могли получиться? Выберите все подходящие варианты:

Ответ:



Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 1. В треугольнике ABC выполнено равенство $\angle A = 2\angle C$. Биссектрисы AD и BE пересекаются в точке X . Найдите DX , если $AB = 5$, $BD = 3$.

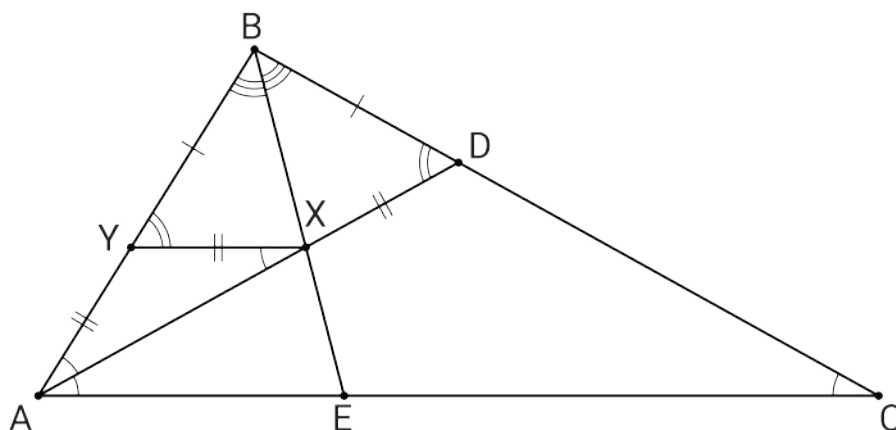
Ответ: 2

Решение.

Для начала обозначим $\angle C = \alpha$, тогда по условию $\angle A = 2\alpha$, т.е. $\angle CAD = \angle DAB = \alpha$. Тогда по сумме углов треугольника ADC выполнено $\angle ADC = 180^\circ - 2\alpha$, а $\angle ADB = 2\alpha$.

Будем доказывать, что $AB = BD + DX$. Отметим на стороне AB такую точку Y , что $BY = BD$. Тогда по первому признаку ($BY = BD$, $\angle YBX = \angle DBX$, $BX = BX$) треугольники BDX и BYX равны. Тогда $\angle BYX = 2\alpha = \angle BAC$, что означает, что $XY \parallel AC$.

Тогда $\angle YXA = \angle XAE = \angle XAY$, что означает, что треугольник AXY равнобедренный и $AY = YX$.
Тогда $DX = XY = AY = AB - BY = AB - BD = 5 - 3 = 2$.



Задание 8. Вариант 2. В треугольнике ABC выполнено равенство $\angle A = 2\angle C$. Биссектрисы AD и BE пересекаются в точке X . Найдите DX , если $AB = 6$, $BD = 4$.

Ответ: 2

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 3. В треугольнике ABC выполнено равенство $\angle A = 2\angle C$. Биссектрисы AD и BE пересекаются в точке X . Найдите DX , если $AB = 7$, $BD = 3$.

Ответ: 4

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 4. В треугольнике ABC выполнено равенство $\angle A = 2\angle C$. Биссектрисы AD и BE пересекаются в точке X . Найдите DX , если $AB = 8$, $BD = 3$.

Ответ: 5

Решение по аналогии с вариантом 1