

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 8

Задание 1. Вариант 1. У Даши есть 30 молочных шоколадок, 11 тёмных и 11 белых. Каждый день она съедает одну из шоколадок. При этом она не ест два дня подряд один и тот же тип шоколада. Кроме того, на следующий день после молочного она не ест тёмный, после тёмного она не ест белый, после белого — молочный. Какое наибольшее количество своих шоколадок она сможет съесть таким образом?

Ответ: 34

Решение.

Заметим, что после молочного шоколада Даша всегда ест белый, после белого — тёмный, после тёмного — молочный. Поэтому за 3 любых последовательных дня Даша съест по одной шоколадке каждого вида. Следовательно, после 33 дней всегда останется только 19 плиток молочного шоколада. Тогда больше 34 шоколадок Даша съесть не сможет. А ровно 34 — да, для этого ей нужно в первый день съесть молочный шоколад.

Задание 1. Вариант 2. У Даши есть 30 молочных шоколадок, 12 тёмных и 12 белых. Каждый день она съедает одну из шоколадок. При этом она не ест два дня подряд один и тот же тип шоколада. Кроме того, на следующий день после молочного она не ест тёмный, после тёмного она не ест белый, после белого — молочный. Какое наибольшее количество своих шоколадок она сможет съесть таким образом?

Ответ: 37

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 3. У Даши есть 30 молочных шоколадок, 13 тёмных и 13 белых. Каждый день она съедает одну из шоколадок. При этом она не ест два дня подряд один и тот же тип шоколада. Кроме того, на следующий день после молочного она не ест тёмный, после тёмного она не ест белый, после белого — молочный. Какое наибольшее количество своих шоколадок она сможет съесть таким образом?

Ответ: 40

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 4. У Даши есть 30 молочных шоколадок, 14 тёмных и 14 белых. Каждый день она съедает одну из шоколадок. При этом она не ест два дня подряд один и тот же тип шоколада. Кроме того, на следующий день после молочного она не ест тёмный, после тёмного она не ест белый, после белого — молочный. Какое наибольшее количество своих шоколадок она сможет съесть таким образом?

Ответ: 43

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 1. У эксперта был набор из 18 внешне одинаковых гирек: 4 гирьки весом 1 г, 7 гирек весом 2 г и 7 гирек весом 3 г. После того как две гирьки из набора потерялись, эксперт не может разложить их все на несколько равных по весу кучек. Какие гирьки были потеряны?

Ответ:



Решение.

Суммарный вес всех гирь равен $4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 39$. Заметим, что если эксперт потерял две однограммовые гирьки, то оставшийся суммарный вес гирек равен $39 - 1 - 1 = 37$ — простое число. Поэтому если эксперт сможет разложить их на несколько равных куч, то каждая куча должна весить по 1 г, что невозможно, так как есть трёхграммовые гири.

Покажем, что никакие другие гири из набора он не мог потерять:

- Потеряны 1, 2 — подходит разбиение на 2 кучки.

$$2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3$$

- Потеряны 1, 3 — подходит разбиение на 5 кучек.

$$2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 3 = 1 + 1 + 2 + 3 = 1 + 3 + 3$$

- Потеряны 2, 2 — подходит разбиение на 5 кучек.

$$2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 1 + 2 + 3$$

- Потеряны 2, 3 — подходит разбиение на 2 кучки.

$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3$$

- Потеряны 3, 3 — подходит разбиение на 3 кучки.

$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 = 1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 1 + 2 + 2 + 3 + 3$$

Задание 2. Вариант 2. У эксперта был набор из 19 внешне одинаковых гирек: 5 гирек весом 1 г, 7 гирек весом 2 г и 7 гирек весом 3 г. После того как две гирьки из набора потерялись, эксперт не может разложить их все на несколько равных по весу кучек. Какие гирьки были потеряны?

Ответ:



Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 3. У эксперта был набор из 21 внешне одинаковой гирьки: 7 гирек весом 1 г, 7 гирек весом 2 г и 7 гирек весом 3 г. После того как две гирьки из набора потерялись, эксперт не может разложить их все на несколько равных по весу кучек. Какие гирьки были потеряны?

Ответ:



Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 1. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) биссектриса угла A перпендикулярна боковой стороне CD . Найдите среднюю линию этой трапеции, если $AD = 4$, $AB = 3$.

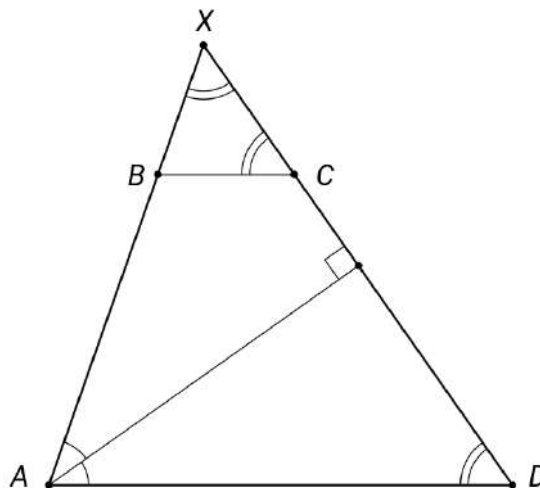
Ответ: 2.5

Решение.

Продлим боковые стороны AB и CD трапеции до пересечения в точке X . Заметим, что треугольник ADX равнобедренный, так как в нём биссектриса совпадает с высотой, т.е. $AD = AX$. Заметим, что треугольник XBC подобен треугольнику XAD и потому тоже равнобедренный, так что $BC = XB = AX - AB = AD - AB$.

Заметим, что тогда средняя линия трапеции равна

$$\frac{AD + BC}{2} = \frac{AD + (AD - AB)}{2} = \frac{2AD - AB}{2} = \frac{2 \cdot 4 - 3}{2} = 2.5.$$



Задание 3. Вариант 2. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) биссектриса угла A перпендикулярна боковой стороне CD . Найдите среднюю линию этой трапеции, если $AD = 5$, $AB = 3$.

Ответ: 3.5

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 3. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) биссектриса угла A перпендикулярна боковой стороне CD . Найдите среднюю линию этой трапеции, если $AD = 7$, $AB = 5$.

Ответ: 4.5

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 4. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) биссектриса угла A перпендикулярна боковой стороне CD . Найдите среднюю линию этой трапеции, если $AD = 8$, $AB = 5$.

Ответ: 5.5

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 1. В одной стране действует прогрессивная система налогообложения. Если человек зарабатывает до 1000 тугриков, то он платит 10 % налогов. Если он зарабатывает больше 1000 тугриков, то с 1000 тугриков он платит 10 % налогов, а со всей оставшейся суммы он платит 30 % налогов.

Настя в 2023 году заработала больше 1000 тугриков, а в 2024 году заработала на 80 % больше, чем в 2023 году. При этом после вычета налогов в 2024 году она получила на 70 % больше, чем в 2023 году. Сколько заработала Настя в 2023 году?

Ответ: 2000

Решение.

Обозначим сумму в тугриках, которую заработала Настя в 2023 году, через x . Тогда в 2024 году она заработала $1.8x$ тугриков. Теперь вычислим, сколько Настя получила в 2023 и в 2024 годах. Поскольку в 2023 году Настя заработала больше 1000 тугриков, 1000 тугриков облагались налогом в 10 %, а оставшиеся $x - 1000$ тугриков — в 30 %. Таким образом, в 2023 году Настя после уплаты налогов получила $900 + 0.7(x - 1000) = 0.7x + 200$ тугриков.

В 2024 году Настя заработала больше, чем в 2023 году, то есть также больше 1000 тугриков. Значит, 1000 тугриков облагались налогом в 10 %, а оставшиеся $1.8x - 1000$ — в 30 %. Значит, после уплаты налогов в 2024 году Настя заработала $900 + 0.7(1.8x - 1000) = 1.26x + 200$ тугриков. Получаем уравнение $1.26x + 200 = 1.7(0.7x + 200)$, откуда $1.26x + 200 = 1.19x + 340$. Таким образом, $0.07x = 140$, откуда $x = 2000$. Значит, Настя заработала 2000 тугриков в 2023 году.

Задание 4. Вариант 2. В одной стране действует прогрессивная система налогообложения. Если человек зарабатывает до 2000 тугриков, то он платит 10 % налогов. Если он зарабатывает больше 2000 тугриков, то с 2000 тугриков он платит 10 % налогов, а со всей оставшейся суммы он платит 30 % налогов.

Настя в 2023 году заработала больше 2000 тугриков, а в 2024 году заработала на 80 % больше, чем в 2023 году. При этом после вычета налогов в 2024 году она получила на 70 % больше, чем в 2023 году. Сколько заработала Настя в 2023 году?

Ответ: 4000

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 3. В одной стране действует прогрессивная система налогообложения. Если человек зарабатывает до 3000 тугриков, то он платит 10 % налогов. Если он зарабатывает больше 3000 тугриков, то с 3000 тугриков он платит 10 % налогов, а со всей оставшейся суммы он платит 30 % налогов.

Настя в 2023 году заработала больше 3000 тугриков, а в 2024 году заработала на 80 % больше, чем в 2023 году. При этом после вычета налогов в 2024 году она получила на 70 % больше, чем в 2023 году. Сколько заработала Настя в 2023 году?

Ответ: 6000**Решение по аналогии с вариантом 1**

Задание 4. Вариант 4. В одной стране действует прогрессивная система налогообложения. Если человек зарабатывает до 4000 тугриков, то он платит 10 % налогов. Если он зарабатывает больше 4000 тугриков, то с 4000 тугриков он платит 10 % налогов, а со всей оставшейся суммы он платит 30 % налогов.

Настя в 2023 году заработала больше 4000 тугриков, а в 2024 году заработала на 80 % больше, чем в 2023 году. При этом после вычета налогов в 2024 году она получила на 70 % больше, чем в 2023 году. Сколько заработала Настя в 2023 году?

Ответ: 8000**Решение по аналогии с вариантом 1**

Задание 5. Вариант 1. Петя загадал трёхзначное число, состоящее из различных ненулевых цифр. Сумма этого числа и всех трёхзначных чисел, которые могут быть получены из него перестановкой цифр, равна 4440. Какое наименьшее число мог загадать Петя?

Ответ: 389**Решение.**

Пусть Петя написал число $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Тогда у него также написаны числа $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$. Сумма этих чисел равна:

$$\begin{aligned} (100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) = \\ = (200 + 20 + 2)(a + b + c) = 4440. \end{aligned}$$

Получаем, что $a + b + c = 20$. Несложно видеть, что наименьшее число, состоящее из ненулевых различных цифр с суммой 20, равно 389.

Задание 5. Вариант 2. Петя загадал трёхзначное число, состоящее из различных ненулевых цифр. Сумма этого числа и всех трёхзначных чисел, которые могут быть получены из него перестановкой цифр, равна 4662. Какое наименьшее число мог загадать Петя?

Ответ: 489**Решение по аналогии с вариантом 1**

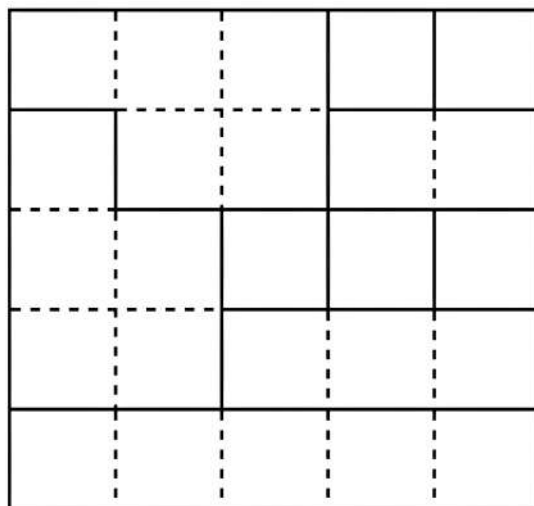
Задание 5. Вариант 3. Петя загадал трёхзначное число, состоящее из различных ненулевых цифр. Сумма этого числа и всех трёхзначных чисел, которые могут быть получены из него перестановкой цифр, равна 4884. Какое наименьшее число мог загадать Петя?

Ответ: 589**Решение по аналогии с вариантом 1**

Задание 5. Вариант 4. Петя загадал трёхзначное число, состоящее из различных ненулевых цифр. Сумма этого числа и всех трёхзначных чисел, которые могут быть получены из него перестановкой цифр, равна 5106. Какое наименьшее число мог загадать Петя?

Ответ: 689**Решение по аналогии с вариантом 1**

Задание 6. Вариант 1. На ферме 25 свиней живут в свинарнике 5×5 , разделённом перегородками так, что каждая свинья имеет свой загончик 1×1 . Все загончики разделены между собой перегородками. Однажды, испугавшись землетрясения, некоторые свиньи перебежали в соседние загончики, а некоторые остались в своих. Когда пришёл фермер, он увидел следующую картину повреждений:



Пунктирными линиями обозначены перегородки, которые были сломаны перебегающими свиньями. Сколько свиней могли остаться в своём загончике? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

✓5

✓6

✓7

✓8

Решение.

Видно, что весь квадрат 5×5 разбит на отдельные фигуры. Каждая свинья могла перебежать только внутри своей фигуры, поэтому достаточно рассматривать каждую фигуру по отдельности.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

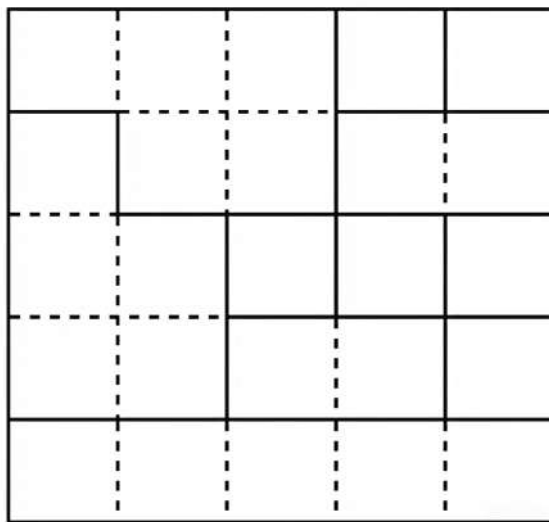
Рассмотрим пятиклеточную фигуру, состоящую из клеток 1, 2, 3, 7, 8. В этой фигуре 5 клеток и сломано тоже 5 перегородок. Поскольку для того, чтобы перегородка была сломана, через неё должна пробежать хотя бы одна свинья, а каждая свинья ломает не более одной перегородки, получаем, что каждая из пяти свиней должна куда-то перебежать. Значит, в этой фигуре на месте осталось 0 свиней. Для второй такой фигуры (из клеток 6, 11, 12, 16, 17) рассуждение аналогично.

Для квадратов 1×1 (клетки 4, 5, 13, 14, 15) понятно, что свиньи остались внутри них.

Рассмотрим прямоугольник $1 \times n$, где $n \geq 2$ (на картинке есть три таких фигуры: (9, 10), (18, 19, 20), (21, 22, 23, 24, 25)). В нём n клеток, а сломанных перегородок $n - 1$. Таким образом, перебежать должна была хотя бы $n - 1$ свинья, т.е. осталось на месте не более одной. При этом возможны оба случая: когда перебежали все и когда одна осталась на месте. Первый случай возможен, если с левых $n - 1$ клеток свиньи перебежали вправо, а свинья в правой клетке перебежала влево. Второй случай возможен, если свинья в правой клетке осталась на месте, а остальные перебежали вправо.

Таким образом получаем, что в пяти фигурах точно есть ровно по одной свинье, оставшейся на месте. А кроме этого, в трёх фигурах число оставшихся на месте свиней равно либо 0, либо 1, причём эти числа не зависят друг от друга. Значит, количество свиней, оставшихся на месте, может быть любым натуральным числом от 5 до 8, т.е. ответом является набор чисел 5, 6, 7, 8.

Задание 6. Вариант 2. На ферме 25 свиней живут в свинарнике 5×5 , разделённом перегородками так, что каждая свинья имеет свой загончик 1×1 . Все загончики разделены между собой перегородками. Однажды, испугавшись землетрясения, некоторые свиньи перебежали в соседние загончики, а некоторые остались в своих. Когда пришёл фермер, он увидел следующую картину повреждений:



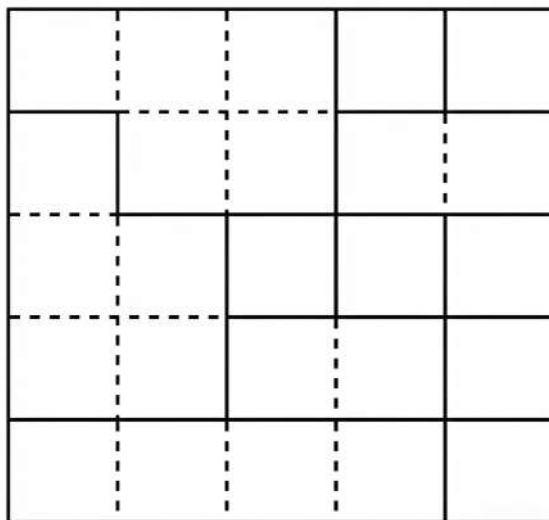
Пунктирными линиями обозначены перегородки, которые были сломаны перебегающими свиньями. Сколько свиней могли остаться в своём загончике? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓6
- ✓7
- ✓8
- ✓9

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 3. На ферме 25 свиней живут в свинарнике 5×5 , разделённом перегородками так, что каждая свинья имеет свой загончик 1×1 . Все загончики разделены между собой перегородками. Однажды, испугавшись землетрясения, некоторые свиньи перебежали в соседние загончики, а некоторые остались в своих. Когда пришёл фермер, он увидел следующую картину повреждений:



Пунктирными линиями обозначены перегородки, которые были сломаны перебегающими свиньями. Сколько свиней могли остаться в своём загончике? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓7
- ✓8
- ✓9
- ✓10

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 1. Колонизаторам Марса нужно доставить в лагерь образцы почвы. В их распоряжении имеются 3 беспилотных машины, которые могут переносить образцы. У одной при полном баке запаса топлива хватит на 4000 метров, у второй — на 3400 метров, у третьей — на 3000 метров. Изначально все машины находятся в лагере и колонизаторы могут перекладывать образцы из одной машины в другую. С какого максимального расстояния

удастся взять пробы грунта? Ответ выразите в метрах. В конце машины могут находиться где угодно. Топливо между машинами передавать нельзя, машины не могут буксировать друг друга.

Ответ: 3225

Решение.

Понятно, что машина, которая доставит образцы почвы в лагерь, должна доехать до какой-то точки, а потом вернуться обратно. Значит, если запас её хода — a метров то максимальное расстояние доставки равно $\frac{a}{2}$.

Пусть машина, которая доставила образцы на расстояние $a/2$, имеет запас хода b . Вычислим максимальное расстояние, откуда она может доставить образцы в точку $a/2$. Эта машина должна проехать $a/2$ на пути туда, а оставшиеся $b - a/2$ распределяются между путём туда и обратно. Значит, она может забрать образцы с максимального расстояния

$$\frac{a}{2} + \frac{b - \frac{a}{2}}{2} = \frac{b}{2} + \frac{a}{4}.$$

Аналогично можно показать, что если у третьей машины запас хода c , то максимальное расстояние, откуда она может доставить образцы, равно

$$\frac{b}{2} + \frac{a}{4} + \frac{c - \frac{b}{2} - \frac{a}{4}}{2} = \frac{c}{2} + \frac{b}{4} + \frac{a}{8}.$$

Отсюда ясно, что наибольшее расстояние достигается, если c — наибольший из запасов, b — второй по величине, a — наименьший. Подставляя $c = 4000$, $b = 3400$, $a = 3000$, получаем ответ

$$\frac{4000}{2} + \frac{3400}{4} + \frac{3000}{8} = 3225.$$

Задание 7. Вариант 2. Колонизаторам Марса нужно доставить в лагерь образцы почвы. В их распоряжении имеются 3 беспилотных машины, которые могут переносить образцы. У одной при полном баке запаса топлива хватит на 12000 метров, у второй — на 10200 метров, у третьей — на 9000 метров. Изначально все машины находятся в лагере и колонизаторы могут перекладывать образцы из одной машины в другую. С какого максимального расстояния удастся взять пробы грунта? Ответ выразите в метрах. В конце машины могут находиться где угодно. Топливо между машинами передавать нельзя, машины не могут буксировать друг друга.

Ответ: 9675

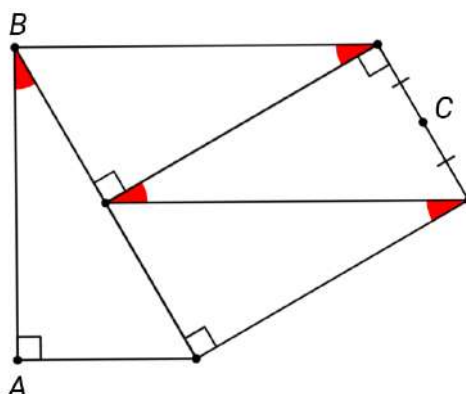
Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 3. Колонизаторам Марса нужно доставить в лагерь образцы почвы. В их распоряжении имеются 3 беспилотных машины, которые могут переносить образцы. У одной при полном баке запаса топлива хватит на 20000 метров, у второй — на 17000 метров, у третьей — на 15000 метров. Изначально все машины находятся в лагере и колонизаторы могут перекладывать образцы из одной машины в другую. С какого максимального расстояния удастся взять пробы грунта? Ответ выразите в метрах. В конце машины могут находиться где угодно. Топливо между машинами передавать нельзя, машины не могут буксировать друг друга.

Ответ: 16125

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 1. Четыре одинаковых прямоугольных треугольника расположены так, как показано на рисунке. A и B — вершины, C — середина стороны одного из треугольников.

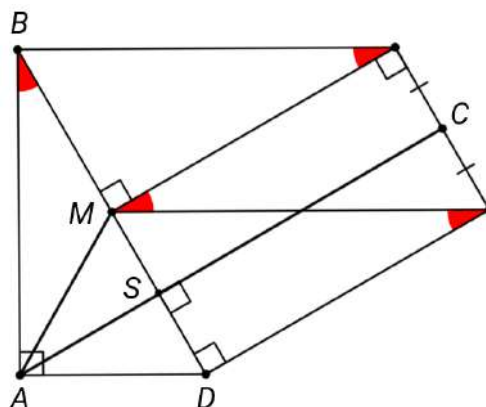


Найдите AC , если известно, что $AB = 10$.

Ответ: 15

Решение.

Отметим точки D и M , как на рисунке.



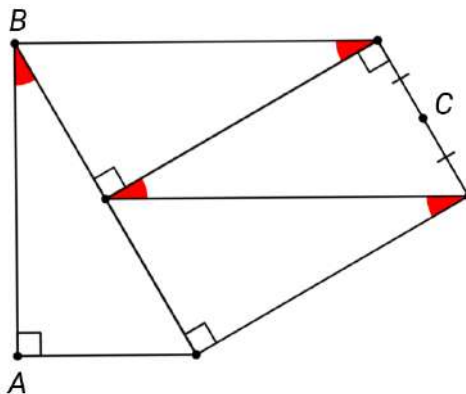
Опустим из точки A перпендикуляр AS на прямую MD . Заметим, что $AM = MD$, поскольку AM является медианой прямоугольного треугольника, $AD = MD$, поскольку они являются соответствующими сторонами в равных треугольниках. Тогда треугольник AMD равносторонний, поэтому S является серединой отрезка MD . Тогда, поскольку CS является средней линией прямоугольника, он равняется длинному катету прямоугольного треугольника, то есть AB . Заметим, что в прямоугольном треугольнике ABD выполнено равенство $BD = 2AD$, таким образом, $\angle ABD = 30^\circ$, и все отмеченные на картинке красные углы равны 30° .

В прямоугольном треугольнике ABS также выполнено равенство $\angle ABS = 30^\circ$, и потому $AB = 2AS$. Тогда

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AS + 2AS}{2AS} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, $AC = \frac{3}{2}AB = 15$.

Задание 8. Вариант 2. Четыре одинаковых прямоугольных треугольника расположены так, как показано на рисунке. A и B — вершины, C — середина стороны одного из треугольников.

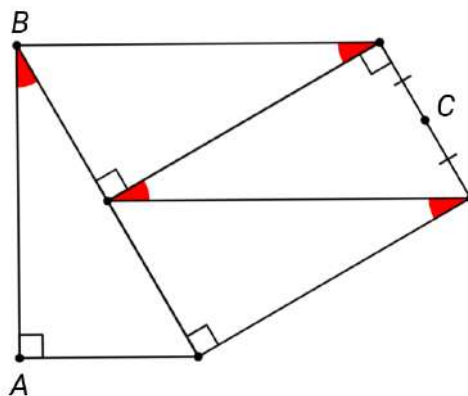


Найдите AC , если известно, что $AB = 12$.

Ответ: 18

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 3. Четыре одинаковых прямоугольных треугольника расположены так, как показано на рисунке. A и B — вершины, C — середина стороны одного из треугольников.

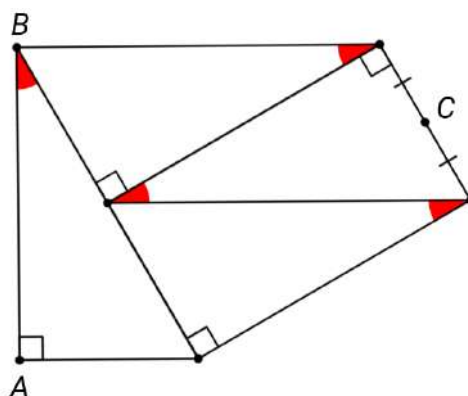


Найдите AC , если известно, что $AB = 14$.

Ответ: 21

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 4. Четыре одинаковых прямоугольных треугольника расположены так, как показано на рисунке. A и B — вершины, C — середина стороны одного из треугольников.



Найдите AC , если известно, что $AB = 16$.

Ответ: 24

Решение по аналогии с вариантом 1