Максимальное количество баллов за олимпиаду — 8

Задание 1. Вариант 1. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $3x$, как показано на рисунке.

Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Ответ: $\dfrac{3}{4}$

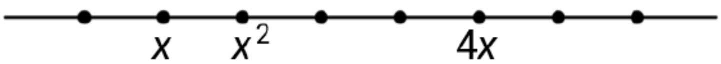
Решение.

Расстояние между $3x$ и x^2, равное $3x - x^2$, в три раза больше расстояния между x^2 и x, которое равно $x^2 - x$. Отсюда получаем уравнение

$$3(x^2 - x) = 3x - x^2.$$

Его корни — $x = 0$ и $x = \dfrac{3}{2}$. Случай $x = 0$ невозможен, так как тогда все три точки x, x^2 и $3x$ совпали. Во втором случае расстояние между отмеченными точками равно $x^2 - x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$.

Задание 1. Вариант 2. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $4x$, как показано на рисунке.

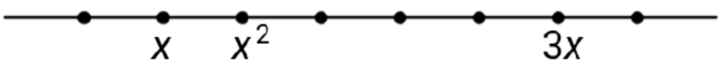


Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Ответ: $\dfrac{21}{16}$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 3. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $3x$, как показано на рисунке.

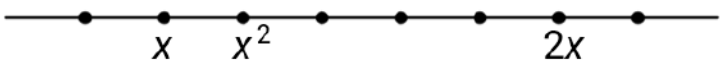


Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Ответ: $\dfrac{14}{25}$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 4. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $2x$, как показано на рисунке.



Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Ответ: $\dfrac{6}{25}$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 1. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 50 г, второй — максимум 40 г, третий — максимум 80 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 150 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в два раза больше, чем вчера, третий — в 4 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Ответ: 110

Решение.

Вчера второй ёжик нёс на себе не более 20 г, первый — не более 50 г, третий — не более 80 г, то есть всего они переносили не более 150 г. Но по условию они переносили ровно 150 г, что возможно только в случае, когда первый нёс на себе 50 г, второй — 20 г, третий — 80 г. Поэтому сегодня они переносят $50 + 2 \cdot 20 + \frac{80}{4} = 110$ г.

Задание 2. Вариант 2. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 40 г, второй — максимум 50 г, третий — максимум 120 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 185 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в два раза больше, чем вчера, третий — в 3 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Ответ: 130

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 3. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 60 г, второй — максимум 100 г, третий — максимум 90 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 200 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в два раза больше, чем вчера, третий — в 3 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Ответ: 190

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 4. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 50 г, второй — максимум 60 г, третий — максимум 90 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 160 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в три раза больше, чем вчера, третий — в 3 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Ответ: 140

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 1. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 10 матчей и проиграла 7 матчей. Команда «Динамо» выиграла 8 матчей и проиграла 17 матчей. Команда «Локомотив» проиграла 9 матчей. Сколько матчей выиграла команда «Локомотив»?

Ответ: 15

Решение.

Заметим, что суммарное количество выигранных матчей равно суммарному количеству проигранных матчей, так как каждый матч по одному разу засчитывается и в выигранные, и в проигранные. Если обозначить за x количество выигранных «Локомотивом» матчей, то получаем уравнение

$$10 + 8 + x = 7 + 17 + 9,$$

откуда $x = 15$.

Задание 3. Вариант 2. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 10 матчей и проиграла 17 матчей. Команда «Динамо» выиграла 19 матчей и проиграла 4 матча. Команда «Локомотив» выиграла 3 матча. Сколько матчей проиграла команда «Локомотив»?

Ответ: 11

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 3. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 9 матчей и проиграла 20 матчей. Команда «Динамо» выиграла 18 матчей и проиграла 6 матчей. Команда «Локомотив» выиграла 7 матчей. Сколько матчей проиграла команда «Локомотив»?

Ответ: 8

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 4. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 2 матчей и проиграла 10 матчей. Команда «Динамо» выиграла 13 матчей и проиграла 6 матчей. Команда «Локомотив» проиграла 9 матчей. Сколько матчей выиграла команда «Локомотив»?

Ответ: 10

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 1.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}.$$

Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

- $a + b + c + d$
- ✓ $-a - b + c + d$
- ✓ $-a - b - c + d$
- $a - b + c - d$
- $-a + b + c - d$

Решение.

По условию $b < c$ и $\frac{1}{b} < \frac{1}{c}$. Если бы b и c были одного знака (оба положительные или оба отрицательные), то из $b < c$ следовало бы, что $\frac{1}{b} > \frac{1}{c}$. Значит, b и c — разных знаков, т.е.

$$a < b < 0 < c < d.$$

Посмотрим теперь на каждый вариант:

(a) можно подобрать контрпример: $a = -101, b = -100, c = 1, d = 2$;

(b) здесь каждое слагаемое $(-a)$, $(-b)$, c и d —положительно, поэтому сумма точно положительна;

(c) здесь каждое слагаемое $(-a)$, $(-b)$, и $d-c$ (последнее положительно, т.к. $c < d$) — положительно, поэтому сумма точно положительна;

(d) можно подобрать контрпример: $a = -2, b = -1, c = 1, d = 2$ (вообще это выражение точно отрицательно: $a-b < 0$ и $c - d < 0$);

(e) можно подобрать контрпример: $a = -2, b = -1, c = 1, d = 100$.

Задание 4. Вариант 2.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}.$$

Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

- $a - b + c + d$
- ✓ $-a + b + c + d$
- ✓ $-a + b - c + d$
- $a + b + c - d$
- $-a - b + c - d$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 3.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d}.$$

Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

- ✓ $-a + b - c + d$
- ✓ $-a - b - c + d$
- ✓ $-a - b + c + d$
- $a - b - c - d$
- $-a + b - c - d$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 4.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}.$$

Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

✓ $-a + b - c + d$

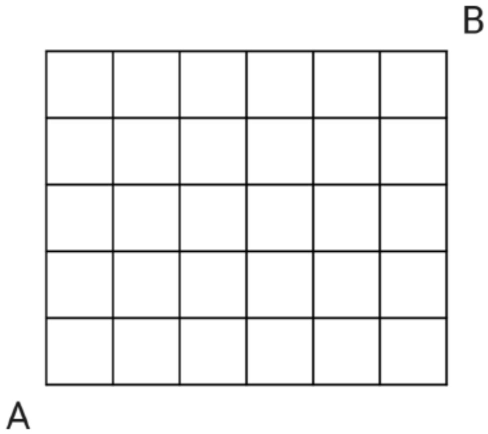
✓ $-a - b + c + d$

✓ $-a + b + c + d$

- $a + b + c - d$
- $-a + b + c - d$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 1. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 5×6 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая — из B.



Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, составляет две трети скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

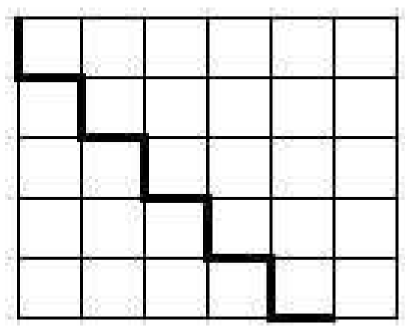
Ответ: 10

Решение.

Посмотрим на точку встречи. Объединённые пути черепашек образуют путь из точки A в точку B, который всегда идёт вправо или вверх. Поэтому суммарно черепашки пройдут путь из 11 отрезков: 6 вправо и 5 вверх.

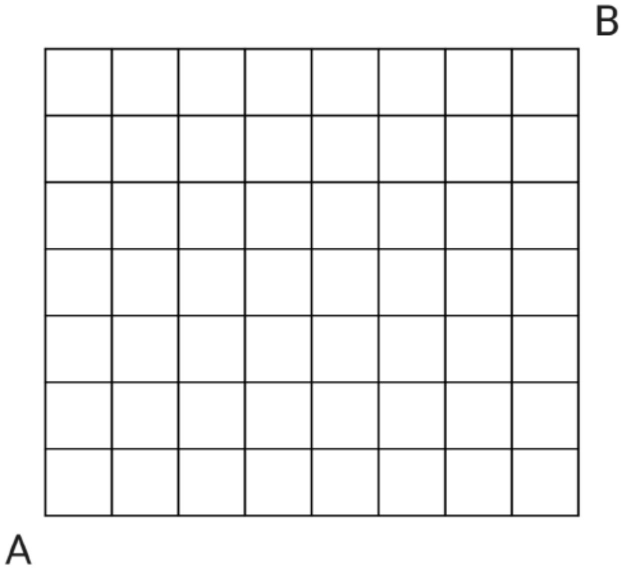
Пусть скорость черепашки A равна $2x$ отрезков в минуту, тогда скорость черепашки B равна $3x$. Значит, скорость сближения черепашек равна $5x$, т.е. черепашки встретятся через $\frac{11}{5x}$ минуты. Значит, до встречи черепашка A проползёт $\frac{11}{5x} \cdot 2x = \frac{22}{5}$ длины отрезков.

Посмотрим, на каких отрезках может оказаться черепашка A, если проползёт $\frac{22}{5}$ длины отрезков:



Несложно видеть, что в каждой из точек, где может оказаться A, может оказаться и B. Итого, черепашки могут встретиться на 10 отрезках.

Задание 5. Вариант 2. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 7×8 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая — из B.

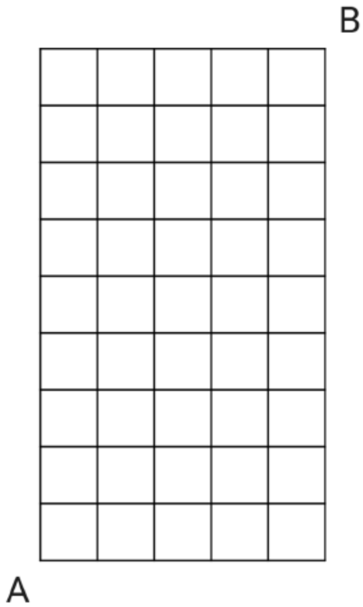


Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, составляет три четверти скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

Ответ: 14

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 3. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 9×5 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая — из B.

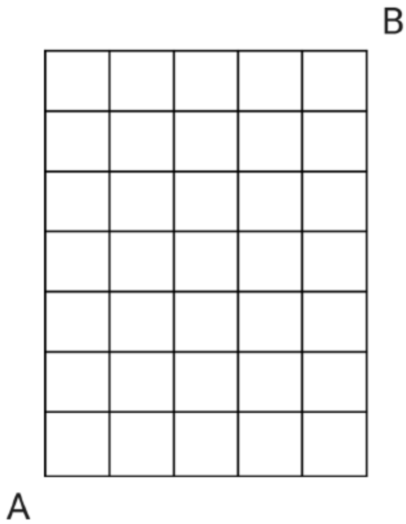


Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, в полтора раза больше скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

Ответ: 11

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 4. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 7×5 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая —- из B.



Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, составляет две пятых скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

Ответ: 8

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 1. Петя написал на доске 7 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых трёх из них делится на 3;
- сумма любых четырёх из них делится на 4;
- сумма любых пяти из них делится на 5.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.

Ответ: 361

Решение.

Докажем, что все числа дают одинаковые остатки при делении на 3, 4 и 5.

Обозначим через s сумму трёх чисел, отличных от каких-то двух a и b. Тогда $s + a$ и $s + b$ делятся на 3, откуда получаем, что $a - b$ делится на 3, это и значит, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на 3. Аналогично доказывается, что любые два числа дают одинаковые остатки при делении на 3, на 4 и на 5.

Значит, разность любых двух чисел делится на НОК$(3, 4, 5) = 60$, т.е. разность любых двух чисел не меньше 60. Тогда наибольшее число не меньше $1 + 60 \cdot 6 = 361$.

При этом числа 1, 61, 121, 181, 241, 301, 361 подходят под условие, так как все они дают остатки 1 при делении на каждое из чисел 3, 4, 5.

Задание 6. Вариант 2. Петя написал на доске 11 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых трёх из них делится на 3;
- сумма любых четырёх из них делится на 4;
- сумма любых семи из них делится на 7.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.

Ответ: 841

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 3. Петя написал на доске 11 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых трёх из них делится на 3;
- сумма любых пяти из них делится на 5;
- сумма любых восьми из них делится на 8.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.

Ответ: 1201

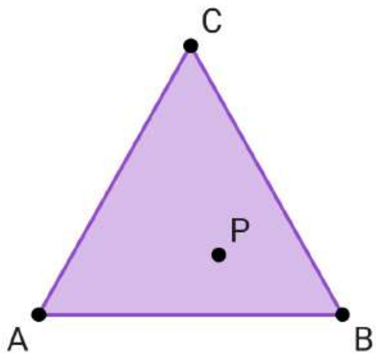
Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 4. Петя написал на доске 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых пяти из них делится на 5;
- сумма любых шести из них делится на 6;
- сумма любых семи из них делится на 7.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.
Ответ: 1891
Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 1. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $8\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 3S_{BCP}$.

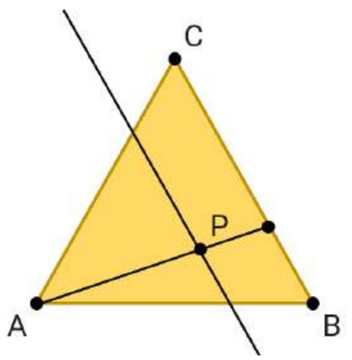


Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.
Ответ: 9
Решение.
Заметим, что

$$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{ACP} + S_{BCP} = 4S_{BCP}.$$

У треугольников PBC и ABC общее основание BC, поэтому высота из точки P на сторону BC в четыре раза меньше, чем высота из A.

Значит, условие равносильно тому, что P лежит на прямой, на расстоянии $1/4$ высоты из точки A. Ближайшая к A точка на этой прямой — основание высоты из точки A, т.е. на расстоянии $3/4$ от высоты треугольника (см. чертёж)

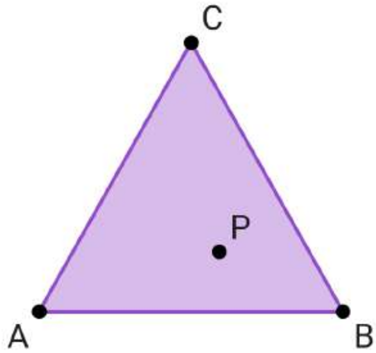


Осталось посчитать длину высоты в равностороннем треугольнике со стороной $8\sqrt{3}$ Это можно сделать многими способами, мы воспользуемся теоремой Пифагора:

$$\sqrt{(8\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2} = 12,$$

откуда ответ $\dfrac{3}{4} \cdot 12 = 9$.

Задание 7. Вариант 2. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $14\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 6S_{BCP}$.

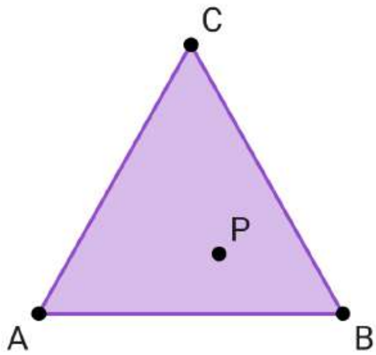


Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.

Ответ: 18

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 3. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $10\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 4S_{BCP}$.

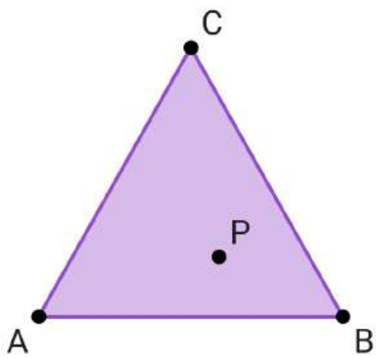


Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.

Ответ: 12

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 4. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $12\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 5S_{BCP}$.



Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.

Ответ: 15

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 1. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ и $\frac{1}{x_2+x_3+x_4}+$ $+\frac{2}{x_1+x_3+x_4}+\frac{3}{x_1+x_2+x_4}+\frac{4}{x_1+x_2+x_3}=25$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2+x_3+x_4}+\frac{2x_2}{x_1+x_3+x_4}+\frac{3x_3}{x_1+x_2+x_4}+\frac{4x_4}{x_1+x_2+x_3}$?

Ответ: 240

Решение.

Решим задачу, когда $x_1+x_2+x_3+x_4=a$ и $\frac{1}{x_2+x_3+x_4}+\frac{2}{x_1+x_3+x_4}+\frac{3}{x_1+x_2+x_4}+\frac{4}{x_1+x_2+x_3}=b$.

Каждое слагаемое из искомой суммы можно представить в виде

$$\frac{kx_k}{a-x_k}=k\left(\frac{a}{a-x_k}-1\right),$$

где $k=1,2,3,4$. Следовательно,

$\frac{1x_1}{a-x_1}+\frac{2x_2}{a-x_2}+\frac{3x_3}{a-x_3}+\frac{4x_4}{a-x_4}=a\left(\frac{1}{a-x_1}+\frac{2}{a-x_2}+\frac{3}{a-x_3}+\frac{4}{a-x_4}\right)-(1+2+3+4)$.

Так как по условию $\frac{1}{a-x_1}+\frac{2}{a-x_2}+\frac{3}{a-x_3}+\frac{4}{a-x_4}=b$, и $1+2+3+4=10$, получаем ответ: $ab-10$.

Задание 8. Вариант 2. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ и $\frac{1}{x_2+x_3+x_4}+$ $+\frac{2}{x_1+x_3+x_4}+\frac{3}{x_1+x_2+x_4}+\frac{4}{x_1+x_2+x_3}=24$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2+x_3+x_4}+\frac{2x_2}{x_1+x_3+x_4}+\frac{3x_3}{x_1+x_2+x_4}+\frac{4x_4}{x_1+x_2+x_3}$?

Ответ: 110

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 3. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1+x_2+x_3+x_4=6$ и $\frac{1}{x_2+x_3+x_4}+$ $+\frac{2}{x_1+x_3+x_4}+\frac{3}{x_1+x_2+x_4}+\frac{4}{x_1+x_2+x_3}=15$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2+x_3+x_4}+\frac{2x_2}{x_1+x_3+x_4}+\frac{3x_3}{x_1+x_2+x_4}+\frac{4x_4}{x_1+x_2+x_3}$?

Ответ: 80

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 4. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ и $\frac{1}{x_2+x_3+x_4}+$ $+\frac{2}{x_1+x_3+x_4}+\frac{3}{x_1+x_2+x_4}+\frac{4}{x_1+x_2+x_3}=13$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2+x_3+x_4}+\frac{2x_2}{x_1+x_3+x_4}+\frac{3x_3}{x_1+x_2+x_4}+\frac{4x_4}{x_1+x_2+x_3}$?

Ответ: 250

Решение по аналогии с вариантом 1