

## А. Натуральные числа

Баллов за задачу: 50  
Формат сдачи ответа: ввод ответа  
Количество попыток: 10  
Посылка в зачет: последняя

### Условие

В ряд выписали 100 натуральных чисел по очереди. Второе число было равно 1, а каждое число, начиная с третьего, равно сумме всех предыдущих выписанных чисел. Затем первое число стерли. Оказалось, что одно из оставшихся чисел равно 123456123456123456. Чему могло быть равно стертое число?

### Формат вывода

В качестве ответа выведите все подходящие значения **в порядке возрастания** через пробел.

### Система оценивания

Точное совпадение ответа — 50 баллов.

Результаты тестирования **не доступны** во время проведения тура.

## В. Матрицы и забытые активации

**Баллов за задачу:** 50  
**Формат сдачи ответа:** ввод ответа  
**Количество попыток:** 10  
**Посылка в зачет:** последняя

### Условие

Вася учится рисовать картинки с помощью нейросети: каждой точке на плоскости он хочет сопоставить цвет пикселя в трёх каналах (R, G, B).

На вход сеть получает вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

а дальше несколько раз подряд делает одну и ту же операцию: умножает текущий вектор-столбец на матрицу весов и получает новый вектор-столбец. Размеры векторов, которые последовательно получаются внутри сети, таковы:

$$2 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 3,$$

где 2 — размер входного вектора, а 3 — размер выходного вектора.

По невнимательности Вася забыл добавить в сеть всё «интересное» — и прибавление констант, и нелинейные функции. Поэтому вся работа сети до последнего шага — это только последовательные умножения на матрицы. Обозначим через

$$T(x_1, x_2)$$

трёхмерный вектор, который получается на самом последнем слое до финальной обработки.

Настоящий цвет пикселя Вася получает после по-координатного обрезания результата в диапазон от 0 до 255:

$$\text{clip}(y)_i = \begin{cases} 0, & y_i < 0, \\ y_i, & 0 \leq y_i \leq 255, \\ 255, & y_i > 255, \end{cases}$$

и, наконец,

$$f(x_1, x_2) = \text{clip}(T(x_1, x_2)).$$

В эксперименте с уже настроенными весами сети оказалось, что

$$f(-2, 3) = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad f(1, 3) = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Найдите вектор  $f(-7, 6)$ .

### Формат вывода

В качестве ответа выведите три числа через пробелы. Если получится нецелое число, выведите его с точностью до 6 знаков после запятой. Если ответа нет или существует несколько возможных выведите -1.

## Система оценивания

Точное совпадение ответа — 50 баллов.

Результаты тестирования **не доступны** во время проведения тура.

## С. Среднее и медиана

Баллов за задачу: 50  
Формат сдачи ответа: ввод ответа  
Количество попыток: 10  
Посылка в зачет: последняя

### Условие

Пусть  $x_1, \dots, x_{10} \in [0, 1]$  и выполнены условия

$$|x_i - x_j| \geq 0.01 \quad \text{для любых } i \neq j,$$

и любой подотрезок  $[a, a + 0.25] \subset [0, 1]$  содержит хотя бы одну точку из множества  $\{x_1, \dots, x_{10}\}$ .

Отсортируем числа:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(10)}.$$

Обозначим

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} x_{(k)}, \quad m = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2}$$

среднее и медиану (как среднее двух средних по порядку чисел).

Насколько максимально может отличаться среднее  $\bar{x}$  от медианы  $m$ , то есть найдите

$$\max |\bar{x} - m|$$

при описанных условиях.

### Формат вывода

Ответ округлите до 6 знаков после запятой, используя в качестве разделителя точку.

### Система оценивания

Точное совпадение ответа — 50 баллов.

Результаты тестирования **не доступны** во время проведения тура.

## D. MAE

Баллов за задачу: 50  
Формат сдачи ответа: ввод ответа  
Количество попыток: 10  
Посылка в зачет: последняя

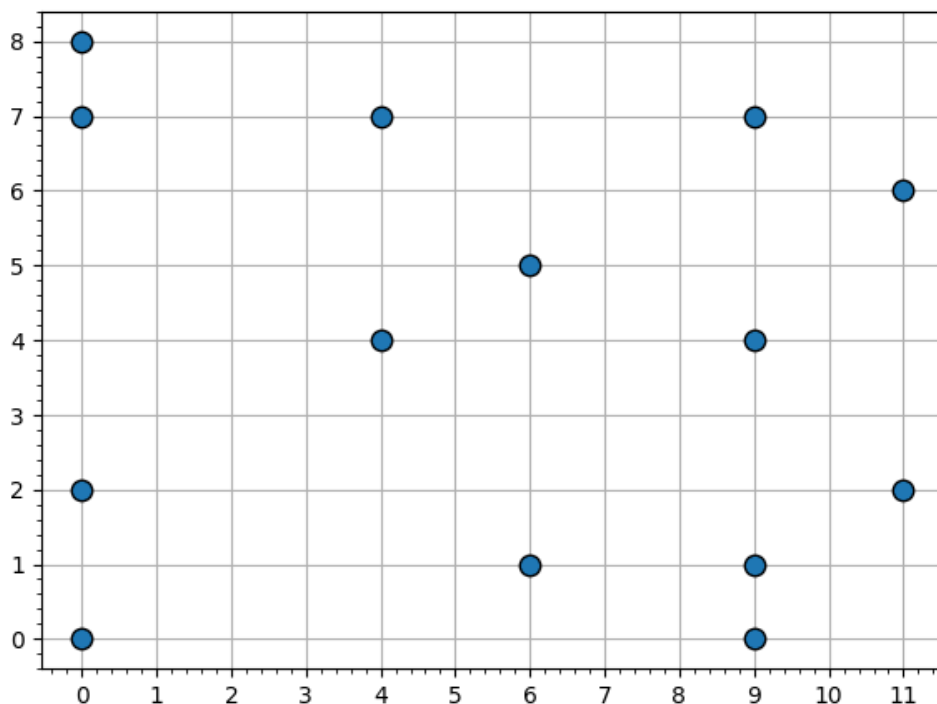
### Условие

Есть выборка из  $N = 14$  наблюдений (на рисунке). Каждая точка задаётся парой координат  $(x_i, y_i)$ .

Рассмотрим линейное предсказание  $\hat{y}(x) = a \cdot x + b$ . Найдите минимальное

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{y}(x_i) - y_i|$$

этого предсказания на выборке  $(x_i, y_i)$  по всем  $a, b$ .



### Формат вывода

Ответ округлите до 6 знаков после запятой, используя в качестве разделителя точку.

### Система оценивания

Точное совпадение ответа — 50 баллов.

Результаты тестирования **не доступны** во время проведения тура.

## Е. Прямая крутится

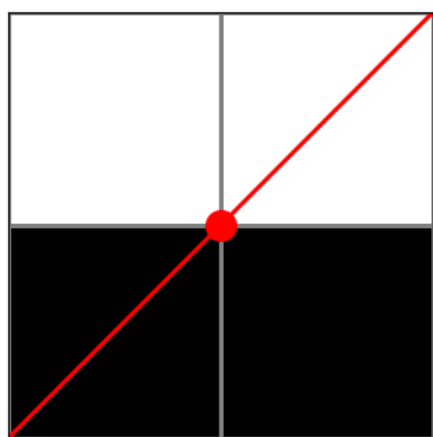
**Баллов за задачу:** 50  
**Формат сдачи ответа:** ввод ответа  
**Количество попыток:** 10  
**Посылка в зачет:** последняя

### Условие

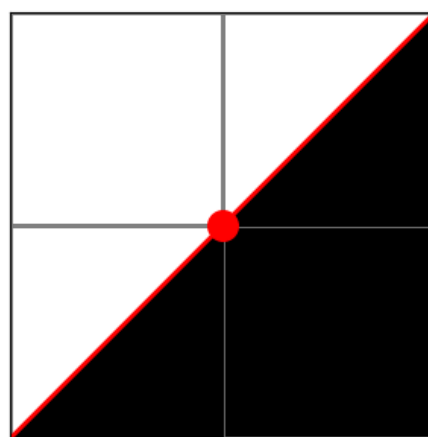
Представим, что у нас есть прямоугольник, раскрашенный в два цвета: часть его площади белая, часть — чёрная. Нам нужно классифицировать точки внутри прямоугольника по цвету.

Мы используем очень простой классификатор: проводим через центр прямоугольника прямую  $L$ . Всё, что лежит по одну сторону от этой прямой, считаем чёрным, а всё, что по другую сторону, считаем белым.

Теперь посмотрим, как хорошо такая прямая может “угадать” разметку. Для любой выбранной прямой  $L$  можно вычислить долю площади, где предсказанный цвет совпадает с настоящим.



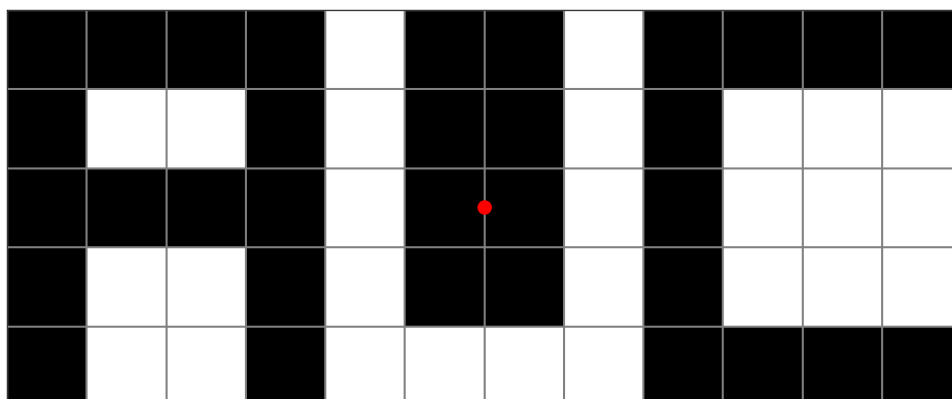
Истинные метки

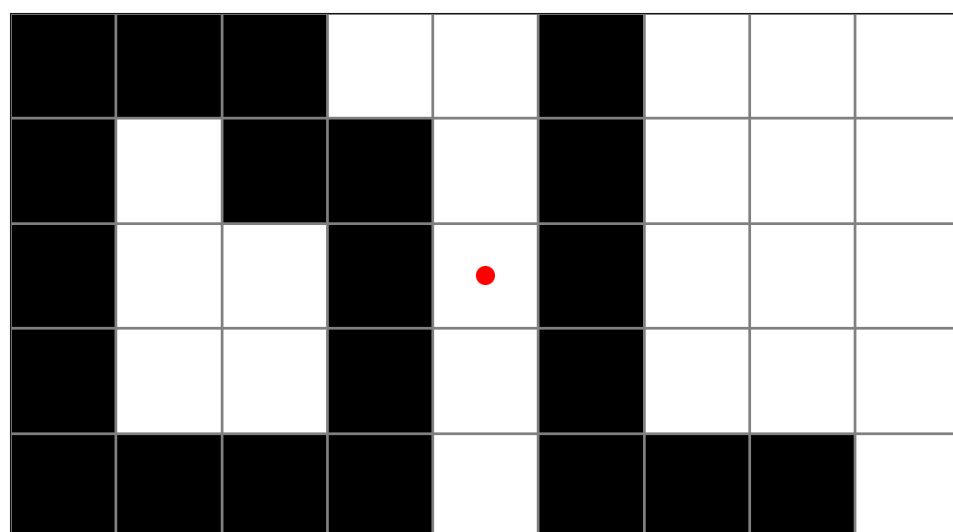
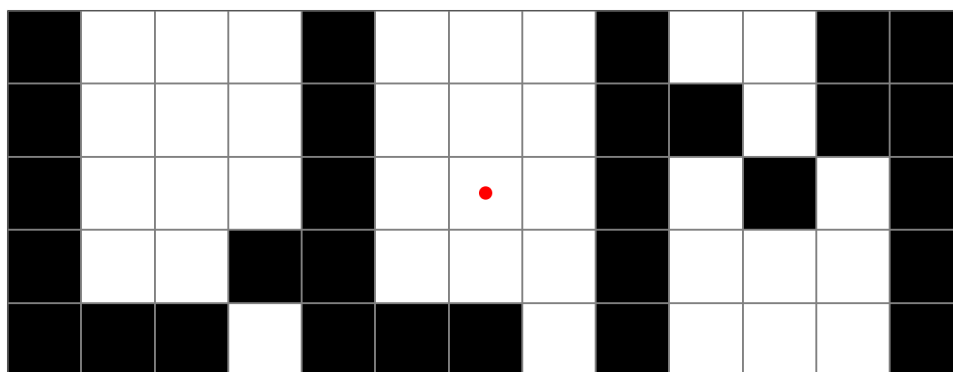


Предсказанные метки

Рассмотрим пример квадрата  $2 \times 2$ . Легко видеть, что доля правильно предсказанной площади равна 0.75.

Среди всех прямых  $L$ , проходящих через центр прямоугольника, какое наибольшее значение может принимать доля площади, предсказанной правильно? Посчитайте ответы для каждой из трех картинок ниже.





### Формат вывода

Выпишите через пробел ответы для трёх картинок. Ответы округлите до 6 знаков после запятой, используя в качестве разделителя точку.

### Система оценивания

Совпадение всех трех ответов — 50 баллов.

Совпадение двух ответов — 25 баллов.

Результаты тестирования **не доступны** во время проведения тура.

## Ф. NLP

**Баллов за задачу:** 50  
**Формат сдачи ответа:** ввод ответа  
**Количество попыток:** 10  
**Посылка в зачет:** последняя

### Условие

Петя изучает язык, в котором алфавит состоит из букв:

$$\{A, D, E, I, L, M, N, S, T\}.$$

Изначально написано слово  $DS$ .

Затем на каждом шаге к слову справа приписывается ещё одна буква.

Выбор новой буквы зависит исключительно от последней буквы текущего слова.

Правила для приписывания новой буквы такие:

- Если последняя буква -  $A$  равновероятно добавляется одна из  $\{M, D\}$ .
- Если последняя буква  $E$  или  $I$  равновероятно добавляется одна из  $\{T, S, M\}$ .
- Если последняя буква  $T$  или  $M$  равновероятно добавляется одна из  $\{L, N\}$ .
- Если последняя буква  $N$  или  $D$  равновероятно добавляется одна из  $\{A, I\}$ .
- Если последняя буква  $S$  или  $L$  равновероятно добавляется одна из  $\{E, I, D\}$ .

Петя очень азартный человек. Он ждёт, когда в строке появится подстрока  $ML$ . Найдите математическое ожидание числа шагов (то есть приписанных букв), необходимых для того, чтобы это случилось.

### Формат вывода

Ответ округлите до 2 знаков после запятой, используя в качестве разделителя точку.

### Система оценивания

Точное совпадение ответа — 50 баллов.

Результаты тестирования **не доступны** во время проведения тура.



## Г. Отрезки

Баллов за задачу: 50  
Формат сдачи ответа: ввод ответа  
Количество попыток: 10  
Посылка в зачет: последняя

### Условие

На общем сервере запланированы запуски обучения модели одинаковой длительности. Каждый запуск — отрезок времени. Концы всех отрезков различны. Администратор настроил очередь так, что в любой момент времени сервер занят максимум двумя такими запусками.

Пусть  $A$  — число способов выбрать непустой набор запусков, которые можно провести без пересечений по времени.

Для примера:

- если на прямой расположен один отрезок, то  $A = 1$ ;
- если расположены два пересекающихся отрезка, то  $A = 2$ ;
- если расположены два непересекающихся отрезка, то  $A = 3$ .

Какие значения из отрезка  $[1500; 2025]$  может принимать величина  $A$ ?

### Формат вывода

В качестве ответа выведите все подходящие значения **в порядке возрастания** через пробел.

### Система оценивания

Точное совпадение ответа — 50 баллов.

Результаты тестирования **не доступны** во время проведения тура.

## Н. Одинокий круг

Баллов за задачу:	50
Формат сдачи ответа:	программный код
Количество попыток:	100
Посылка в зачет:	Последняя
Ограничение времени:	10 секунд
Ограничение памяти:	64 Мб
Ввод:	стандартный ввод или input.txt
Вывод:	стандартный вывод или output.txt

### Условие

Андрей готовится к собеседованию на стажировку по машинному обучению. Чтобы разобраться с базовыми идеями классификации, он начал с самого простого случая: если точки двух классов на плоскости можно разделить прямой, то метод опорных векторов (SVM) строит разделяющую прямую

$$w_1x + w_2y + b = 0,$$

и знак выражения  $w_1x + w_2y + b$  определяет, к какому классу относится точка (с одной стороны от прямой все точки будут иметь знак  $+$ , а с другой  $-$ ).

Так Андрей познакомился с линейной классификацией.

Он нашёл простой пример кода, который показывает, как можно считать точки из стандартного ввода, записать их в таблицу с колонками 'x', 'y', 'label' и обучить по этим данным линейный SVM:

```
import sys
import pandas as pd
from sklearn.svm import SVC

def read_points():
    data = []
    tokens = sys.stdin.read().split()
    it = iter(tokens)

    n = int(next(it))
    for _ in range(n):
        x = float(next(it))
        y = float(next(it))
        label = int(next(it))
        data.append((x, y, label))

    df = pd.DataFrame(data, columns=["x", "y", "label"])
    return df

df = read_points()

clf = SVC(kernel="linear")
clf.fit(df[["x", "y"]], df["label"])
```

```
w1, w2 = clf.coef_[0]
b = clf.intercept_[0]
print(w1, w2, b)
```

Однако на собеседовании Андрею досталась другая задача.

Даны точки на плоскости с метками классов  $-1$  и  $+1$ . Гарантируется, что существует окружность с центром  $(x_0, y_0)$  и радиусом  $R > 0$  такая, что

- все точки класса  $-1$  лежат строго внутри этой окружности;
- все точки класса  $+1$  лежат строго вне этой окружности.

Нужно найти **любую** такую окружность  $(x_0, y_0, R)$ .

Помогите Андрею решить эту задачу и пройти собеседование!

### Формат ввода

Первая строка: целое число  $n$  ( $3 \leq n \leq 10^5$ ). Далее  $n$  строк: по три вещественных числа  $x_i, y_i, label_i$  — координаты очередной точки и ее метка.

Гарантируется, что  $|x_i|, |y_i| \leq 10^9$ .

### Формат вывода

Выведите три вещественных числа  $x, y$  и  $R$  — координаты и радиус разделяющей окружности.

### Система оценивания

Каждый пройденный тест даст вам 1 балл.

Максимальный возможный балл за задачу — 50.

Результаты тестирования **доступны** во время проведения тура.

### Пример

Ввод	Вывод
10 0 0 -1 1 1 -1 2 0 -1 -2 0 -1 0 2 -1 4 0 1 -4 0 1 0 4 1 3 4 1 4 3 1	0 0 3

### Примечания

Данная картинка соответствует первому примеру.

Оранжевые точки соответствуют  $label = -1$ , синие соответствуют  $label = 1$ .

