Всероссийская олимпиада школьников 2012-2013 в городе Москве

Типовые задания I (школьного) этапа по математике

9 класс. Краткие решения.

1. Вместо знаков многоточия вставьте такие числа, чтобы выражение $(x^2 + \ldots\times x + 2) \times(x + 3) = (x + \ldots)\times(x^2 + \ldots\times x + 6)$ стало тождеством.

Ответ. $(x^2+3x+2)(x+3)=(x+1)(x^2+5x+6)$

Решение. Обозначим неизвестные коэффициенты a, b, c соответственно:

$(x^2+ax+2)(x+3)=(x+b)(x^2+cx+6)$ *и приведем к стандартному виду многочлены в левой и правой части:*

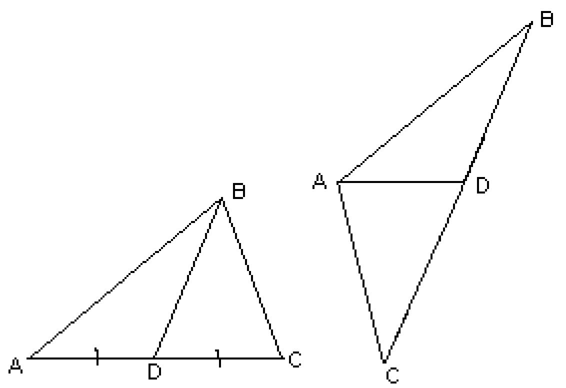
$x^3 +(a+3)x^2 + (3a+2)x+6 = x^3 +(b+c)x^2 + (bc+6)x+6b$

Данное равенство будет являться тождеством тогда и только тогда, когда одновременно выполняются равенства $6b=6$; $bc+6=3a+2$; $b+c=a+3$. *Решая соответствующую систему уравнений, получим, что* $b=1$; $a=3$; $c=5$.

2. Вася вырезал из картона треугольник, разрезал его на два треугольника и послал обе части Пете, который опять сложил из них треугольник. Верно ли, что Петин треугольник обязательно равен вырезанному Васей? Если нет – приведите пример, если да – обоснуйте.

Ответ. Нет.

Например, если Вася разрезал остроугольный треугольник ABC по медиане BD (см. рис. слева), а Петя сложил треугольник так, как это показано на рис.



Получившийся треугольник не равен исходному, т.к. исходный – остроугольный, а получившийся – тупоугольный (∠A получившегося треугольника равен сумме ∠A и ∠C исходного).

3. Аня и Даня вместе весят 82 кг, Даня и Таня – 74 кг, Таня и Ваня – 75 кг, Ваня и Маня – 65 кг, Маня и Аня – 62 кг. Кто тяжелее всех и сколько он весит?

Ответ. Ваня, он весит 43 кг.

Решение. Сложив данные в условии веса: 82+74+75+65+62=358, получим удвоенный вес всех детей. Т.е. все дети весят 358/2=179.

Аня, Даня, Таня, Ваня в сумме весят 82+75=157, т.е. Маня весит 179-157=22.

Аналогично находим, что Аня весит 179-(74+65)=40, Даня весит 179-(75+62)=42, Таня 179-(82+65)=32, Ваня 179-(74+62)=43. Т.о. самый тяжелый Ваня и он весит 43 кг.

4. Решите числовой ребус: ТЭТА+БЭТА=ГАММА. (Разные буквы – разные цифры.)

Ответ. 4940+5940=10880

Решение. Так как А+А заканчивается на А, то А=0. Т.к. Г – результат переноса в следующий разряд, то Г =1. Так как А+А заканчивается на А, то А=0. Значит переноса в разряд десятков нет, т.е. Т+Т заканчивается на М, и значит М – четно. Переноса в разряд сотен тоже нет, т.к. иначе нечетное число Э+Э+1 заканчивалось бы на четное М. Т.к. переноса нет, то 2ТБ<10. Возможные варианты 2, 3, 4. Если Т=2, то Э=7, откуда Б=7 – но 7 уже занята. Если Т=3, то М=6, Э=8, откуда Б=6, но 6=М. И последний вариант Т=4. Тогда М=8, Э=9. Откуда Б=5 – противоречия нет. Таким образом, возможен только один вариант: 4940+5940=10880

5. В треугольнике ABC точка M – середина AC, MD и ME – биссектрисы треугольников ABM и CBM соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке F. Найдите MF, если DE = 7.

Ответ. 3,5

Решение. По свойству биссектрисы из треугольников AMB и CMB получим, что $\frac{AD}{BD}=\frac{AM}{BM}$ *и* $\frac{CE}{BE}=\frac{CM}{BM}$. *По условию, AM = CM, значит,* $\frac{AD}{BD}=\frac{CE}{BE}$, *следовательно, DE || AC (по теореме, обратной теореме Фалеса, для угла ABC или же из подобия треугольников DBE и ABC). Тогда F – середина отрезка DE.*

Так как MD и ME – биссектрисы смежных углов, то треугольник DME – прямоугольный. Его медиана MF, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы DE.

6. В клетчатом квадрате 6 × 6, вначале пустом, Саша закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку количество граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел в них будет равна 60.

Доказательство. *Выложим наш квадрат из спичек, в том числе все перегородки между клеточками (длина спички равна стороне клеточки). Вместо того, чтобы закрашивать клетку, будем закрашивать ограничивающие ее спички. Тогда число, записываемое в каждую клетку равно количеству ранее закрашенных спичек, ограничивающих эту клетку. Выкинем все спички, составляющие периметр исходного квадрата. Тогда каждая оставшаяся спичка добавляет 1 в общую сумму (учитывается 1 раз в числе той из двух клеток, разделяемых этой спичкой, которая была закрашена позднее. Таким образом, сумма всех чисел есть количество внутренних перегородок между клетками. А их будет 6*5 вертикальных и 6*5 горизонтальных, т.е. всего 60.*